



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS ANDALAS
FAKULTAS MIPA
JURUSAN MATEMATIKA

RENCANA PROGRAM DAN KEGIATAN PEMBELAJARAN
SEMESTER (RPKPS)

Mata Kuliah	Statistika Matematika II	Dosen	Dr. Maiyastri, M.Si. Ir. Yudiantri Asdi, M.Sc.
Kode / SKS Prasyarat	PAM 342/ 4 SKS	Kode Dosen Status	Wajib
Universitas Fakultas	Andalas MIPA	Jurusan Program Studi Konsentrasi	Matematika Matematika
Semester	5 (Lima)		

KOMPETENSI:

1. Mahasiswa memiliki kemampuan menjelaskan konsep sebaran pelimitan, pendugaan parameter dan pengujian hipotesis

POKOK BAHASAN:

1. Statistik Tataan
2. Sebaran Pelimitan
3. Statistik dan Sebaran Penarikan Sampel
4. Pendugaan Titik
5. Kecukupan dan Kelengkapan
6. Pendugaan Selang
7. Pengujian Hipotesis

(1) MINGGU KE	(2) KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN (KOMPETENSI)	(3) BAHAN KAJIAN	(4) BENTUK PEMBELAJARAN	(5) KRITERIA PENILAIAN (INDIKATOR)	(6) BOBOT NILAI (%)
1	1. Mengetahui rencana pembelajaran 2. Menurunkan sebaran statistik tataan	Pendahuluan dan Statistik Tataan	Penjelasan rencana pembelajaran dan materi pokok	Kehadiran	
2	1. Mendapatkan sebaran pelimitan dari fungsi peubah acak. 2. Menjelaskan pengertian konvergen dalam sebaran 3. Menjelaskan pengertian konvergen dalam peluang 4. Menjelaskan tentang Teorema Limit Pusat 5. Menjelaskan tentang sebaran-sebaran normal asimtotik 6. Menjelaskan tentang sifat-sifat konvergen stokhastik	Sebaran Pelimitan	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
3					
4					
5	1. Menjelaskan pengertian statistik 2. Menurunkan sebaran dari statistik 3. Menurunkan sebaran-sebaran t dan F 4. Menjelaskan tentang sifat-sifat sebaran normal	Statistik dan Sebaran Penarikan Sampel	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
6					
7					

8	1. Menggunakan metode momen dalam pendugaan parameter	Pendugaan Titik	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
9	2. Menggunakan metode kemungkinan maksimum dalam pendugaan parameter				
	3. Menjelaskan sifat-sifat penduga parameter				
10	1. Menjelaskan konsep kecukupan dan kelengkapan	Kecukupan dan kelengkapan	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
	2. Menggunakan kriteria faktorisasi untuk mendapatkan statistik cukup				
	3. Menjelaskan sifat-sifat statistik cukup				
11	1. Menurunkan pendugaan selang menggunakan metode pivot	Pendugaan Selang	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
12	2. Menurunkan pendugaan selang menggunakan metode umum				
13	1. Menjelaskan konsep pengujian hipotesis	Pengujian Hipotesis	Presentasi dosen dan diskusi	Kehadiran, PR, Quis	
14	2. Menjelaskan uji paling kuasa				
15	3. Menggunakan Lemma Neyman-Pearson untuk menentukan daerah kritis pada pengujian hipotesis sederhana				
16	4. Menjelaskan uji paling kuasa seragam 5. Menjelaskan uji rasio kemungkinan				

NORMA AKADEMIK :

- Kegiatan pembelajaran sesuai Jadwal Resmi, toleransi keterlambatan 20 menit.
- Aturan jumlah minimal presensi dalam pembelajaran tetap diberlakukan, termasuk aturan cara berpakaian atau bersepatu.

NILAI AKHIR:

Tugas/Kuis 15%

UTS 40%

UAS 45%

Kelulusan berdasarkan Peraturan Akademik Unand 2009.

TUGAS TERSTRUKTUR :

Pekerjaan Rumah (PR) yang diambil dari referensi.

Referensi:

Bain, L. J. and M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. 2nd ed. PWS-Kent Publ. Co. Boston.

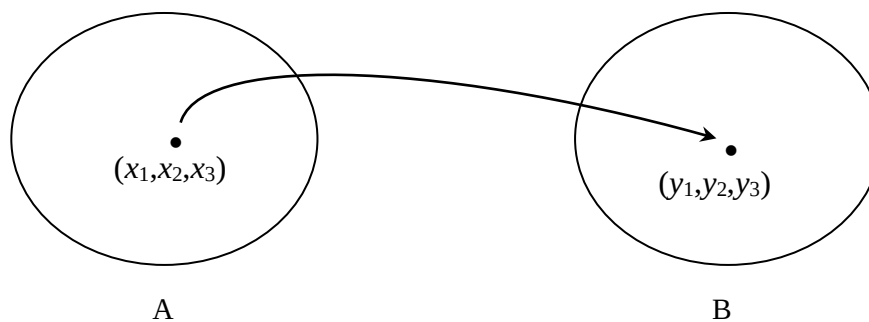
Dibuat		Diperiksa		Disetujui	
Tanggal		Tanggal		Tanggal	
Oleh		Oleh		Oleh	
Jabatan	Dosen MK	Jabatan	Tim Evaluasi Kurikulum TM	Jabatan	Kajur Matematika
Tanda Tangan		Tanda Tangan		Tanda Tangan	

SEBARAN STATISTIK TATAAN

Andaikan X_1, X_2, X_3 merupakan contoh acak dari sebaran kontinu. Karena contoh acak diambil dari populasi asal yang mempunyai sebaran kontinu, maka peluang untuk memperoleh sedikitnya dua nilai yang sama adalah nol, yakni

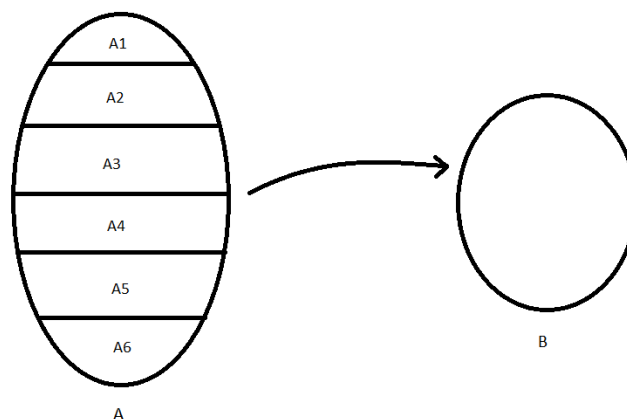
$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = X_3) = P(X_2 = X_3) = P(X_1 = X_2 = X_3) = 0.$$

Kemudian ketiga peubah ini diurutkan dari kecil ke besar, misalkan dinotasikan dengan $X_{(1)}, X_{(2)}$, dan $X_{(3)}$.. Untuk lebih sederhana disimbolkan dengan peubah baru yaitu berturut-turut Y_1, Y_2 , dan Y_3 . Peubah yang diperoleh dengan cara demikian disebut dengan statistik tataan (*order statistics*). Sebagai contoh misalkan $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1$. Maka $y_1 = x_{(1)} = 1, y_2 = x_{(2)} = 4$ dan $y_3 = x_{(3)} = 5$.



$X \sim f(x)$ dalam selang (a, b)

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_1 < x_2 < x_3 < b\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_1 < x_3 < x_2 < b\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_2 < x_1 < x_3 < b\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_2 < x_3 < x_1 < b\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_3 < x_1 < x_2 < b\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}$$



$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_1 < x_2 < x_3 < b\}$$

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = y_3$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_1 < x_3 < x_2 < b\}$$

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_3$$

$$x_3 = y_2$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_2 < x_1 < x_3 < b\}$$

$$x_1 = y_2$$

$$x_2 = y_1$$

$$x_3 = y_3$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_2 < x_3 < x_1 < b\}$$

$$x_1 = y_3$$

$$x_2 = y_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$J_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_3 < x_1 < x_2 < b\}$$

$$x_1 = y_2$$

$$x_2 = y_3$$

$$x_3 = y_1$$

$$J_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) | a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}$$

$$x_1 = y_3$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = y_1$$

$$J_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Sehingga $|J_i|=1$, untuk $i = 1, 2, \dots, 6$.

Fungsi kepekatan peluang bersama dari X_1, X_2, X_3 adalah

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^3 f(x_i) \text{ untuk } a < x_i < b, i = 1, 2, 3$$

Fungsi kepekatan peluang bersama dari Y_1, Y_2, Y_3 adalah

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= \sum_{i=1}^6 \prod_{j=1}^3 f(w_{ij}(y)) |J_i| \\ &= 3! f(y_1) f(y_2) f(y_3) \text{ untuk } a < y_1 < y_2 < y_3 < b \end{aligned}$$

Teorema.

Bila $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah contoh acak dari sebaran kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dalam selang (a, b) dan $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)}, \dots, Y_n = X_{(n)}$, maka f.k.p bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) & , a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b, \\ 0 & , \text{selainnya} \end{cases}$$

Contoh. Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ adalah contoh acak dari sebaran $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$ nol selainnya. Dapatkan fungsi kepekatan peluang dari dan $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)}, \dots, Y_{20} = X_{(20)}$.

Penyelesaian:

Fungsi kepekatan peluang dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$ adalah

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_{20}) &= 20! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_{20}) \\ &= 20! \prod_{i=1}^{20} (2y_i) \\ &= 20! 2^{20} \prod_{i=1}^{20} y_i \end{aligned}$$

untuk $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{20} < 1$.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah contoh acak dari sebaran $f(x)$ dalam selang (a, b) dan $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)}, \dots, Y_n = X_{(n)}$. Bagaimana sebaran dari Y_1 ? Bagaimana sebaran dari Y_n ? Bagaimana sebaran dari Y_k ? Bagaimana sebaran dari Y_i, Y_j ?

a) Sebaran dari Y_1

Fungsi kepekatan peluang dari Y_1 dapat diturunkan dari mengintegalkan fungsi kepekatan peluang bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ terhadap peubah selain Y_1 .

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n \\ &= \int_{y_1}^b \cdots \int_{y_{n-1}}^b n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n) dy_n \cdots dy_2 \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} [1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \\ &= n[1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \end{aligned}$$

untuk $a < y_1 < b$

b) Sebaran dari Y_n

Fungsi kepekatan peluang dari Y_n dapat diturunkan dari mengintegalkan fungsi kepekatan peluang bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ terhadap peubah selain Y_n .

$$\begin{aligned}
g_n(y_n) &= \int_{-\infty}^{y_n} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{n-1} \\
&= \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_n} n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n) dy_1 \dots dy_{n-1} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} [F(y_n)]^{n-1} f(y_n) \\
&= n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n)
\end{aligned}$$

untuk $a < y_n < b$

c) Sebaran dari Y_k

Fungsi kepekatan peluang dari Y_k dapat diturunkan dari mengintegralkan fungsi kepekatan peluang bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ terhadap peubah selain Y_k .

$$\begin{aligned}
g_k(y_k) &= \int_{-\infty}^{y_k} \cdots \int_{-\infty}^{y_k} \int_{-\infty}^{y_k} \cdots \int_{-\infty}^{y_k} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n \\
&= \int_a^{y_k} \cdots \int_a^{y_k} \int_{y_k}^b \cdots \int_{y_{n-1}}^b n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n) dy_n \dots dy_{k+1} dy_1 \dots dy_{k-1} \\
&= \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k)
\end{aligned}$$

untuk $a < y_k < b$

d) Sebaran bersamadari Y_i, Y_j

$$\begin{aligned}
g_{ij}(y_i, y_j) &= \int_{-\infty}^{y_j} \cdots \int_{-\infty}^{y_j} \int_{-\infty}^{y_i} \cdots \int_{-\infty}^{y_i} \int_{-\infty}^{y_j} \cdots \int_{-\infty}^{y_j} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_{j-1} dy_{j+1} \dots dy_n \\
&= \int_{y_i}^{y_j} \cdots \int_{y_{j-2}}^{y_j} \int_a^{y_i} \cdots \int_a^{y_j} \int_{y_{n-1}}^b n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n) dy_n \dots dy_{j+1} dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{j-1} \dots dy_{i+1} \\
&= \frac{n!}{(i-1)! (j-i-1)! (n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} f(y_i) [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_j)
\end{aligned}$$

untuk $a < y_i < y_j < b$

Contoh. Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ adalah contoh acak dari sebaran $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$ nol selainnya. Misalkan $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)}, \dots, Y_{20} = X_{(20)}$. Dapatkan fungsi kepekatan peluang dari

(a) statistik tataan ke-1, Y_1

- (b) statistik tataan ke-20, Y_{20}
- (c) statistik tataan ke-10, Y_{10}
- (d) statistik tataan ke-5 dan 15, Y_5 dan Y_{15}

Penyelesaian:

- (a) Fungsi kepekatan peluang dari Y_1 adalah

$$g_1(y_1) = 20(1 - y_1^2)^{20-1}(2y_1) = 40y_1(1 - y_1^2)^{19} \text{ untuk } 0 < y_1 < 1$$

- (b) Fungsi kepekatan peluang dari Y_{20} adalah

$$g_{20}(y_{20}) = 20(y_{20}^2)^{20-1}(2y_{20}) = 40y_{20}^{39} \text{ untuk } 0 < y_{20} < 1$$

- (c) Fungsi kepekatan peluang dari Y_{10} adalah

$$g_{10}(y_{10}) = \frac{20!}{9!10!}(y_{10}^2)^9(1 - y_{10}^2)^{10}(2y_{10}) = 3695120y_{10}^{19}(1 - y_{10}^2)^{10} \text{ untuk } 0 < y_{10} < 1$$

- (d) Fungsi kepekatan peluang bersama dari Y_5 dan Y_{15} adalah

$$\begin{aligned} g_{5,15}(y_5, y_{15}) &= \frac{20!}{4!9!5!}(y_5^2)^4(2y_5)(y_{15}^2 - y_5^2)^9(2y_{15})(1 - y_{15}^2)^5 \\ &= 9311702400y_5^9y_{15}(y_{15}^2 - y_5^2)^9(1 - y_{15}^2)^5 \end{aligned}$$

$$\text{untuk } 0 < y_5 < y_{15} < 1$$

Untuk peubah acak diskrit dan kontinu, fungsi kepekatan peluang dari statistik tataan minimum atau maksimum dapat diturunkan langsung menggunakan teknik CDF. Untuk statistik tataan minimum

$$\begin{aligned} G_1(y_1) &= P(Y_1 \leq y_1) \\ &= 1 - P(Y_1 > y_1) \\ &= 1 - P(\text{semua } X_i > y_1) \\ &= 1 - [1 - F(y_1)]^n \end{aligned}$$

Untuk statistik tataan maksimum

$$\begin{aligned} G_n(y_n) &= P(Y_n \leq y_n) \\ &= P(\text{semua } X_i \leq y_n) \\ &= [F(y_n)]^n \end{aligned}$$

Teorema. Untuk suatu sampel acak berukuran n dari sebaran diskrit atau kontinu dengan CDF, $F(x)$, CDF dari statistik tataan ke- k adalah

$$G_k(y_k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [F(y_k)]^j [1 - F(y_k)]^{n-j}$$

Soal-soal Latihan:

1. Misalkan X_1 dan X_2 adalah sampel acak berukuran $n = 2$ dari suatu sebaran kontinu dengan fkp $f(x) = 2x$ jika $0 < x < 1$ dan nol selainnya.
 - (a) Dapatkan fkp marjinal dari statistik tataan terkecil dan terbesar, Y_1 dan Y_2 .
 - (b) Dapatkan fkp bersama dari Y_1 dan Y_2 .
 - (c) Dapatkan fkp dari jangkauan (*range*) $R = Y_2 - Y_1$.
2. Andaikan suatu sampel acak berukuran n diambil dari suatu sebaran dengan fkp $f(x) = 1/x^2$ jika $1 \leq x < \infty$ dan nol selainnya.
 - (a) Berikan fkp bersama dari statistik tataan.
 - (b) Berikan fkp dari statistik tataan terkecil, Y_1 .
 - (c) Berikan fkp dari statistik tataan terbesar, Y_n .
 - (d) Dapatkan fkp dari jangkauan, $R = Y_n - Y_1$, untuk $n = 2$.
 - (e) Berikan fkp dari median, Y_r , asumsikan bahwa n ganjil sehingga $r = (n + 1) / 2$.
3. Pandanglah suatu sampel acak berukuran $n = 5$ dari sebaran Pareto, $X_i \sim PAR(1,2)$.
 - (a) Berikan fkp bersama dari statistik tataan ke-2 dan ke-4, Y_2 dan Y_4 .
 - (b) Berikan fkp bersama dari tiga statistik tataan pertama, Y_1, Y_2 dan Y_3 .
 - (c) Berikan fungsi sebaran (*CDF*) dari median, Y_3 .
4. Pandanglah suatu sampel acak berukuran n dari sebaran eksponen, $X_i \sim EXP(1)$.
Berikan fkp dari:
 - (a) Statistik tataan terkecil, Y_1 .
 - (b) Statistik tataan terbesar, Y_n .
 - (c) Jangkauan, $R = Y_n - Y_1$.
 - (d) r statistik tataan pertama, $Y_1, \dots, Y_r$.
5. Suatu sistim disusun dari lima komponen yang saling bebas yang tersambung secara seri.
 - (a) Jika fkp dari waktu gagal dari tiap komponen adalah sebaran eksponen, $X_i \sim EXP(1)$, maka berikan fkp dari waktu gagal dari sistim tersebut.
 - (b) Ulangi (a), tetapi asumsikan bahwa komponen tersambung secara paralel.
 - (c) Andaikan bahwa sistim tersebut gagal pada saat paling kurang tiga komponen gagal. Berikan fkp dari waktu gagal dari sistim tersebut.
 - (d) Andaikan bahwa n komponen tidak terdistribusi identik, $X_i \sim EXP(\theta_i)$. Berikan fkp dari waktu gagal dari sistim tersebut bila komponen tersambung secara seri.

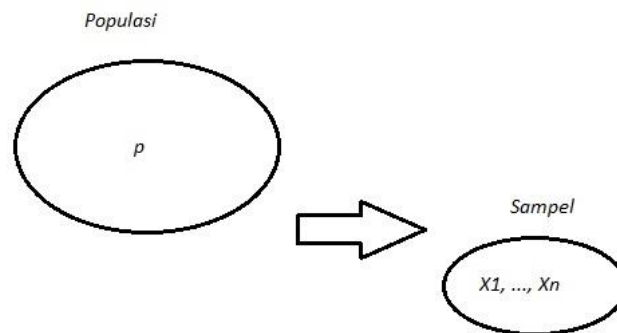
6. Pandanglah suatu sampel acak berukuran n dari sebaran geometrik, $X_i \sim GEO(p)$.

Berikan fungsi sebaran (CDF) dari:

- (a) Statistiktataan minimum, Y_1 .
- (b) Statistiktataan ke- k , Y_k .
- (c) Statistik tataan maksimum, Y_n .
- (d) Dapatkan $P(Y_1 \leq 1)$.

PENGUJIAN HIPOTESIS

Pengujian hipotesis merupakan proses dalam menentukan kebenaran suatu anggapan tentang populasi berdasarkan kenyataan (fakta) yang diperoleh melalui sampel.



Misalkan sebuah koin ingin diketahui apakah seimbang atau tidak. Bila tidak seimbang barangkali koin itu mempunyai peluang sisi angka 0,51. Hipotesis yang diuji dapat dituliskan sebagai dalam bentuk hipotesis sederhana berikut:

$$H_0 : p = 0,50$$

$$H_1 : p = 0,51$$

Ruang parameter padahal $\Omega = \{0.5, 0.51\}$. $\Omega_0 = \{0.5\}$ dan $\Omega - \Omega_0 = \{0.51\}$

Pada pengujian ini akan menghasilkan empat kemungkinan sebagai berikut:

Keputusan	Keadaan sebenarnya	
	H_0 benar	H_1 benar
Terima H_0	BENAR	Salah Jenis II
Tolak H_0	Salah Jenis I	BENAR

Terdapat dua jenis kesalahan yang mungkin terjadi, yaitu: Salah Jenis I dan Salah Jenis II.

$$P(\text{Salah Jenis I}) = \alpha$$

yang disebut juga taraf nyata pada pengujian tersebut.

$$P(\text{Salah Jenis II}) = \beta$$

$1 - \beta$ disebut kuasa pengujian.

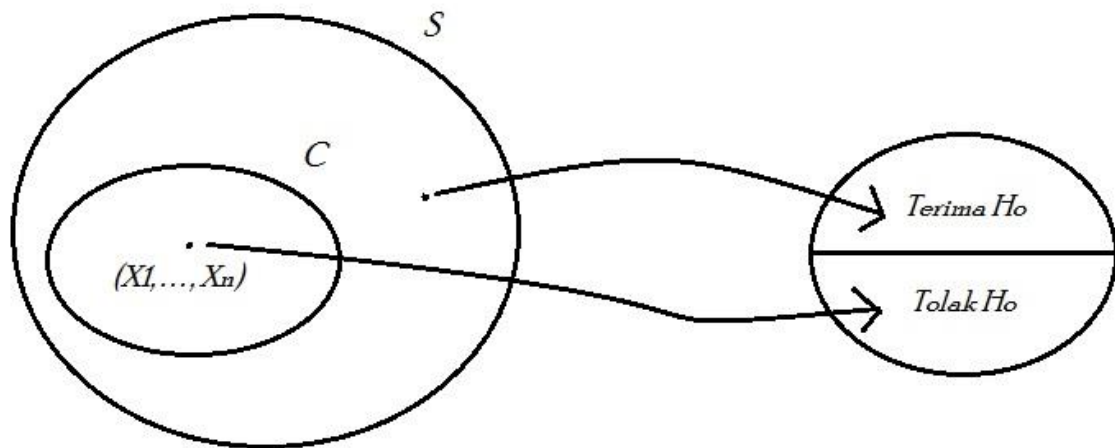
Misalkan kita ingin menguji hipotesis terhadap koin tersebut sebagai berikut:

$$H_0 : p \leq 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$

Ruang parameter p adalah $\Omega = [0,1]$. $\Omega_0 = [0, 0.5]$ dan $\Omega - \Omega_0 = (0.5,1]$.

Untuk mengambil keputusan tolak atau terima (tidak tolak) H_0 dilakukan penarikan sampel. Misalkan S adalah ruang sampel dan C adalah kumpulan semua titik sampel yang membuat kita memutuskan untuk menolak H_0 . $S - C$ adalah daerah penerimaan.



$$P(\text{Salah Jenis I}) = P[(X_1, \dots, X_n) \in C \mid H_0]$$

$$P(\text{Salah Jenis II}) = P[(X_1, \dots, X_n) \in S - C \mid H_1]$$

Statistik cukup untuk p adalah $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Dengan menggunakan Teorema Limit Pusat,

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \xrightarrow{s} N(0,1)$$

$$n\hat{p} \sim \text{BIN}(n, p)$$

Nilai tengah dan ragam sebaran $\text{BIN}(n, p)$ adalah $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np(1 - p)$. Sehingga

$$\frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \sim N(0,1)$$

Misalkan $\alpha = 0.01$, sehingga

$$P\left(\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq z_\alpha \mid H_0\right) = 0.01$$

Dari tabel normal diperoleh $z_\alpha = 2.326$.

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} &\geq 2.326 \\ (2\hat{p} - 1)\sqrt{n} &\geq 2.326 \\ (2\hat{p} - 1) &\geq \frac{2.326}{\sqrt{n}} \\ \hat{p} &\geq \frac{1}{2} + \frac{1.163}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Dengan demikian daerah kritis pengujian tersebut adalah

$$\begin{aligned}C &= \{(X_1, \dots, X_n) \mid \hat{p} \geq \frac{1}{2} + \frac{1.163}{\sqrt{n}}\} \\ \beta &= P\left(\hat{p} \geq \frac{1}{2} + \frac{1.163}{\sqrt{n}} \mid H_1\right) \\ &\approx P\left(Z < \frac{\frac{1}{2} + \frac{1.163}{\sqrt{n}} - 0.51}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) \\ &= P\left(Z < \left(-0.01 + \frac{1.163}{\sqrt{n}}\right)(2\sqrt{n})\right) \\ &= P(Z < -0.02\sqrt{n} + 2.326)\end{aligned}$$

Agar $\beta = 0.05$, dapat ditentukan ukuran sampel n sebagai berikut:

$$P(Z < -1.645) = P(Z < -0.02\sqrt{n} + 2.326) = \beta = 0.05$$

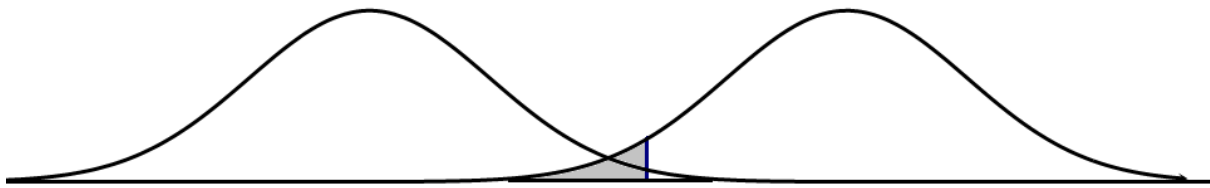
Sehingga

$$-0.02\sqrt{n} + 2.326 = -1.645$$

$$0.02\sqrt{n} = 3.971$$

$$\sqrt{n} = 198.55$$

$$n \approx 39422$$



Catatan:

1. Bila ukuran sampel diperbesar, maka α dan β menurun.
2. Untuk n tetap, bila α turun, maka β naik dan bila α naik, maka β menurun.

Contoh:

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari sebaran $N(\mu, \sigma^2)$, dimana σ^2 diketahui.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Statistik cukup $\bar{X}$ terdistribusi menurut sebaran $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Daerah kritis $C =$

$$\{(X_1, \dots, X_n) | \bar{X} \geq c\}$$

$$P(\text{Salah Jenis I}) = \alpha$$

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in C | H_0] = \alpha$$

$$P\left(Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Sehingga

$$\frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

Jadi

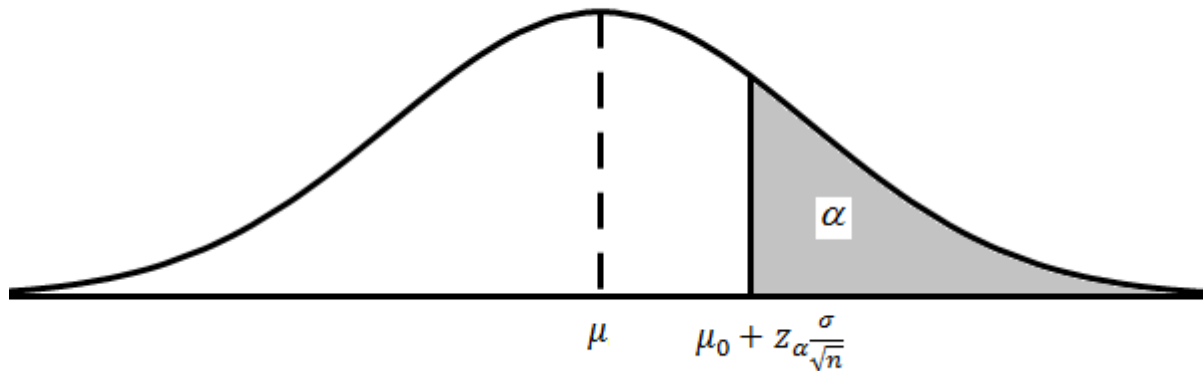
$$c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Fungsi Kuasa

Fungsi Kuasa adalah suatu fungsi yang nilainya merupakan peluang menolak H_0 jika nilai parameter μ .

$$\pi(\mu) = P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu\right) = P\left(Z \geq \frac{\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\pi(\mu_0) = P\left(Z \geq \frac{\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

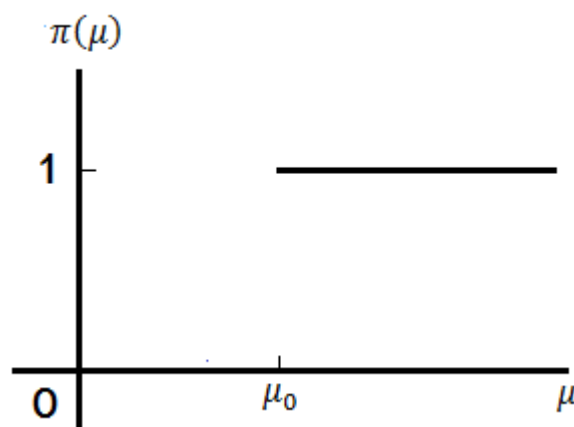


$$\Omega_0 = \{\mu \mid \mu \leq \mu_0\}$$

$$\Omega - \Omega_0 = \{\mu \mid \mu > \mu_0\}$$

$$\alpha = \max_{\mu \in \Omega_0} \pi(\mu) = \text{ukuran daerah kritis}$$

Bila $n \rightarrow \infty$, maka kurva fungsi kuasa menjadi sebagai berikut:



Fungsi kuasa ini merupakan fungsi kuasa yang ideal karena peluang membuat kesalahan adalah nol.

Fungsi Kritis

a) Untuk Uji Tak Teracak

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

b) Untuk Uji Teracak

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ di bagian dalam } C \\ \gamma, & x \text{ dibatas } C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

dimana $0 < \gamma < 1$

Fungsi Kuasa

Dengan menggunakan fungsi kritis, fungsi kuasa dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\pi(\theta) = E_{\theta}[\varphi(x)]$$

Ukuran pengujian (ukuran daerah kritis) adalah

$$\alpha = \max_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta)$$

Contoh:

Misalkan $X_1, \dots, X_{10}$ merupakan sampel acak dari $BIN(1, p)$. Tentukan fungsi kritis untuk pengujian hipotesis berikut pada taraf nyata $\alpha = 0.05$.

$$H_0 : p = 0.2$$

$$H_1 : p = 0.7$$

Penyelesaian:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$$

$$10\hat{p} = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim BIN(10, p)$$

Berdasarkan penghitungan nilai peluang sebaran Binom tersebut, diperoleh keputusan :

- Tolak H_0 jika $\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 5$
- Tolak H_0 dengan peluang γ bila $\sum_{i=1}^{10} X_i = 4$
- Terima H_0 jika $\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 3$

Keputusan tersebut dapat dituliskan menggunakan fungsi kritis sebagai berikut:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{10} x_i = 4 \\ 0, & \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 3 \end{cases}$$

Karena taraf nyata pengujian adalah $\alpha = 0.05$, γ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\alpha = \pi(0.2) = E_{0.2}[\varphi(\mathbf{x})]$$

$$0.05 = 1 \cdot P(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 | p = 0.2) + \gamma \cdot P(\sum_{i=1}^{10} x_i = 4 | p = 0.2) + 0 \cdot P(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 3 | p = 0.2)$$

$$0.05 = 0.0328 + 0.0881\gamma + 0$$

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0328}{0.0881} = 0.1952$$

Sehingga fungsi kritis untuk pengujian hipotesis tersebut adalah:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \\ 0.1952, & \sum_{i=1}^{10} x_i = 4 \\ 0, & \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 3 \end{cases}$$

Uji Paling Kuasa

Definisi:

Suatu uji $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ berdasarkan daerah kritis C^* disebut uji paling kuasa berukuran α jika

1. $\pi_{C^*}(\theta_0) = \alpha$, dan
2. $\pi_{C^*}(\theta_1) \geq \pi_C(\theta_1)$ untuk daerah kritis lain C berukuran α ($\pi_C(\theta_0) = \alpha$).

C^* adalah daerah kritis paling kuasa.

Teorema (Lemma Neyman-Pearson)

Misalkan $X_1, \dots, X_n \sim f(\mathbf{x}; \theta)$, dan

$$\lambda(\mathbf{x}; \theta_0, \theta_1) = \frac{f(\mathbf{x}; \theta_0)}{f(\mathbf{x}; \theta_1)}$$

dan misalkan $C^* = \{\mathbf{x} | \lambda(\mathbf{x}; \theta_0, \theta_1) \leq k\}$ dimana k adalah konstanta sehingga

$$P(\mathbf{x} \in C^* | \theta_0) = \alpha$$

maka C^* adalah daerah kritis paling kuasa berukuran α untuk menguji

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Contoh:

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari sebaran $N(\mu, \sigma^2)$, dimana σ^2 diketahui.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \mu_0, \mu_1) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2}} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} [-2\bar{x}(\mu_0 - \mu_1) + (\mu_0^2 - \mu_1^2)] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0 - \mu_1) [-2\bar{x} + (\mu_0 + \mu_1)] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_1 - \mu_0) (2\bar{x} - \mu_0 - \mu_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\lambda(\mathbf{x}; \mu_0, \mu_1) \leq k$$

$$\exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_1 - \mu_0) (2\bar{x} - \mu_0 - \mu_1) \right\} \leq k$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_1 - \mu_0) (2\bar{x} - \mu_0 - \mu_1) \leq \ln k$$

$$2\bar{x} - \mu_0 - \mu_1 \geq -\frac{2(\ln k)\sigma^2}{n(\mu_1 - \mu_0)}$$

$$\bar{x} \geq \underbrace{\frac{\mu_0 + \mu_1}{2} - \frac{(\ln k)\sigma^2}{n(\mu_1 - \mu_0)}}_{k^*}$$

$$C^* = \{\mathbf{x} | \bar{x} \geq k^*\}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\pi_{C^*}(\mu_0) = \alpha \Rightarrow P(\bar{x} \geq k^* | \mu_0) = \alpha$$

$$P\left(Z \geq \underbrace{\frac{k^* - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{z_\alpha}\right) = \alpha$$

$$k^* = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sehingga

$$C^* = \left\{ \mathbf{x} \mid \bar{x} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

yang tidak tergantung pada μ_1 . Oleh karena itu C^* adalah daerah kritis paling kuasa.

Uji Paling Kuasa Seragam (UPKS)

Definisi:

$X_1, \dots, X_n \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ dimana $\theta \in \Omega$

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega - \Omega_0$$

Suatu uji dengan daerah kritis C^* berukuran α disebut Uji Paling Kuasa Seragam (UPKS), jika

$$\max_{\theta \in \Omega_0} \pi_{C^*}(\theta) = \alpha$$

dan

$$\pi_{C^*}(\theta) \geq \pi_C(\theta)$$

untuk semua $\theta \in \Omega - \Omega_0$ dan semua daerah kritis C berukuran α .

Contoh:

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari sebaran $N(\mu, \sigma^2)$, dimana σ^2 diketahui.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$$

Telah ditunjukkan pada contoh sebelumnya bahwa daerah kritis

$$C^* = \left\{ \mathbf{x} \mid \bar{x} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

tidak tergantung pada μ_1 . Maka uji hipotesis di atas disebut uji paling kuasa seragam.

Teorema:

Andaikan $X_1, \dots, X_n$ mempunyai fkp bersama berbentuk

$$f(\mathbf{x}; \theta) = c(\theta)h(\mathbf{x})\exp[q(\theta)t(\mathbf{x})]$$

dimana $q(\theta)$ adalah fungsi naik.

1. Suatu uji paling kuasa seragam berukuran α untuk menguji $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ adalah tolak H_0 bila $t(\mathbf{x}) \geq k$, dimana $P[t(\mathbf{x}) \geq k | \theta_0] = \alpha$.
2. Suatu uji paling kuasa seragam berukuran α untuk menguji $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$ adalah tolak H_0 bila $t(\mathbf{x}) \leq k$, dimana $P[t(\mathbf{x}) \leq k | \theta_0] = \alpha$.

Aplikasi dari teorema ini bila sampel acak berasal dari sebaran yang termasuk keluarga kelas eksponen, yaitu

$$f(\mathbf{x}; \theta) = c(\theta)h(\mathbf{x})\exp[q(\theta)t(\mathbf{x})]$$

dengan $t(\mathbf{x}) = \sum u(x_i)$ dan $q(\theta)$ adalah fungsi yang menaik.

P-value

P-value (Nilai-P) adalah nilai α terkecil dimana H_0 dapat ditolak berdasarkan nilai statistik uji yang dihitung dari nilai-nilai pengamatan.

Contoh:

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari sebaran $N(\mu, \sigma^2)$, dimana σ^2 diketahui.

Statistik uji:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Daerah kritis:

$$z > z_\alpha$$

Andaikan diperoleh nilai statistik uji berdasarkan nilai-nilai pengamatan $z_{hit} = 2.00$. Maka nilai-p (p-value) dapat dihitung sebagai berikut:

$$p - value = P(Z \geq z_{hit}) = P(Z \geq 2.00) = 0.0228$$

Soal-soal Latihan:

- Andaikan $X_1, \dots, X_{16}$ adalah sampel acak dari sebaran $N(\mu, 1)$, dan kita ingin menguji $H_0 : \mu = 20$ pada taraf nyata $\alpha = 0.05$, berdasarkan rata-rata sampel $\bar{X}$.
 - Tentukan daerah kritis dalam bentuk $A = \{\bar{x} | -\infty < \bar{x} \leq a\}$ dan $B = \{\bar{x} | b \leq \bar{x} < \infty\}$.
 - Dapatkan peluang Salah Jenis II, $\beta = P(\text{Salah Jenis II})$, untuk setiap daerah kritis pada jawaban (a) bila $H_1 : \mu = 21$. Daerah kritis yang mana yang tidak logis?
 - Ulangi soal (b) bila $H_1 : \mu = 19$.
 - Berapa taraf nyata untuk suatu uji dengan daerah kritis $A \cup B$?
 - Berapa $\beta = P(\text{Salah Jenis II})$ untuk suatu uji dengan daerah kritis $A \cup B$ jika $|\mu - 20| = 1$?
- Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari $EXP(1, \eta)$ (yaitu $f(x) = e^{-(x-\eta)}$, jika $x > \eta$ dan nol selainnya). Suatu uji untuk menguji hipotesis $H_0 : \eta \leq \eta_0$ vs $H_1 : \eta > \eta_0$ dilakukan berdasarkan statistik tataan ke-1, $X_{(1)}$.
 - Dapatkan daerah kritis berukuran α yang berbentuk $\{x_{(1)} \geq c\}$.
 - Turunkan fungsi kuasa untuk pengujian (a).
 - Turunkan rumus untuk menentukan ukuran sampel n untuk suatu uji berukuran α dengan $\beta = P(\text{Salah Jenis II})$ jika $\eta = \eta_1$.

3. Sebuah koin dilemparkan 20 kali dan $x = 6$ sisi angka teramati. Misalkan $p = P(angka)$. Suatu uji untuk menguji $H_0 : p \geq 0.5$ vs $H_1 : p < 0.5$ dengan ukuran paling besar 0.10 diinginkan.
 - (a) Berapa kuasa uji bila $\alpha = 0.0577$ untuk alternatif $p = 0.2$?
 - (b) Berapa p -value untuk pengujian hipotesis tersebut?
4. Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari $N(\mu, 1)$.
 - (a) Dapatkan uji paling kuasa untuk menguji $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
 - (b) Dapatkan uji paling kuasa untuk menguji $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
 - (c) Tunjukkan bahwa tidak ada uji paling kuasa untuk menguji $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
5. Misalkan $X_1, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari $WEI(\theta, 2)$. Turunkanlah uji paling kuasa seragam untuk menguji $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.