RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)
PROGRAM STUDI : S1 MATEMATIKA
FAKULTAS /PPs: MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS

MATA KULIAH	KODE	Rumpun MK	BOBOT (sks)	SEMESTER	Tgl Penyusunan
Statistika Matematika I	**PAM 291**	**Statistika**	**4**	**4**	**16-2-2017**

OTORISASI	**Dosen Pengembang RPS**	**Koordinator Rumpun MK**	**Ka Program Studi**
	Izzati Rahmi H.G,M.si	**Dr. Maiyastri**	**Dr. Ferra Yanuar**

<table>
<tr><td rowspan="14">Capaian Pembelajaran (CP)

Catatan :
S : Sikap
P : Pengetahuan
KU : Keterampilan Umum
KK : Keterampilan Khusus</td><td colspan="2">CPL Program Studi</td></tr>
<tr><td>S8</td><td>Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik;</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>Menguasai konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskret, aljabar, analisis dan geometri, serta teori peluang dan statistika</td></tr>
<tr><td>KU1</td><td>Mampu mengembangkan pemikiran matematis, yang diawali dari pemahaman prosedural / komputasi hingga pemahaman yang luas meliputi eksplorasi, penalaran logis, generalisasi , abstraksi , dan bukti formal</td></tr>
<tr><td>KK1</td><td>Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya</td></tr>
<tr><td>KK2</td><td>Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur</td></tr>
<tr><td colspan="2">CP Mata Kuliah</td></tr>
<tr><td>1</td><td>menjelaskan konsep peluang dan menghitung peluang sebuah kejadian peluang</td></tr>
<tr><td>2</td><td>menentukan fungsi kepekatan peluang dari sebuah peubah acak tunggal dan karakteristiknya (nilai harapan, ragam dan fungsi pembangkit momennya)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dari peubah acak ganda dan karakteristiknya.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>menentukan fungsi kepekatan peluang dari sebuah peubah acak yang merupakan fungsi dari peubah acak lainnya yang telah diketahui fungsi peluangnya.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Mengidentifikasi hubungan antara masalah-masalah dalam Statistika Matematika I dengan cabang matematika yang lain, begitu juga dengan cabang - cabang ilmu yang lainnya</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Mengkomunikasikan buah pikiran mereka secara sistematis, dapat bekerjasama dan mengadaptasikan diri dengan mahasiswa lain dalam kelompok, serta melakukan diskusi dengan baik.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Deskripsi Singkat Mata Kuliah</td><td colspan="2">Dalam mata kuliah ini diberikan materi tentang teori peluang, peubah acak dan sebarannya, sebaran diskret khusus, sebaran kontinu khusus, peubah acak ganda, sifat-sifat peubah acak ganda, sebaran fungsi peubah acak.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Bahan Kajian</td><td colspan="2">1. Teori Peluang
2. Peubah Acak dan Sebarannya
3. Sebaran Diskret Khusus
4. Sebaran Kontinu Khusus
5. Peubah Acak Ganda
6. Sifat-sifat Peubah Acak Ganda
7. Sebaran Fungsi Peubah Acak</td></tr>
<tr><td>Pustaka</td><td colspan="2">Utama :
1. Bain, L. J. and M. Engelhardt. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics.2nd ed. PWS-Kent Pulb.CO.Boston. (buku teks wajib)
Pendukung :
2. Hogg, R.V. and A.T.Craig. 1995. Introduction to Mathematical Statistics.5th ed. Prentice Hall. New Jerssey.
3. Nasution, AH dan A.Rambe. 1983. Teori Statistika. Bhratara, Jakarta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Media Pembelajaran</td><td>Perangkat lunak :</td><td>Perangkat keras :</td></tr>
<tr><td>Minitab</td><td>Komputer/Laptop dan LCD Projector</td></tr>
<tr><td>Team Teaching</td><td colspan="2">Hazmira Yozza,Msi, Yudiantri Asdi, M.Sc, Izzati Rahmi H.G,M.SI</td></tr>
<tr><td>Assessment</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th>NO</th><th>KOMPONEN PENILAIAN</th><th>BOBOT (%)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Penilaian Hasil</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Ujian I</td><td>25 %</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Ujian II</td><td>25 %</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ujian Akhir Semester</td><td>25%</td></tr>
<tr><td colspan="3">Penilaian Proses</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Kemandirian, berpikir kritis dan analitis, kerja dalam tim, dan manajemen waktu.
(Tugas mandiri, tugas kelompok, , latihan di kelas,keaktifan)</td><td>25 %</td></tr>
<tr><td colspan="2">TOTAL</td><td>100 %</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Norma Akademik	a. Mengikuti Peraturan Akademik Program Sarjana Universitas Andalas. b. Toleransi keterlambatan adalah 10 menit (berlaku juga untuk dosen). c. Pengumpulan tugas dilakukan sebelum deadline yang ditetapkan. Bagi yang telat menyerahkan tugas, nilai tugasnya dikurangi (10 x *n* hari keterlambatan)%. d. Yang berhalangan hadir karena sakit harus disertai dengan keterangan sakit/surat pemberitahuan sakit dan diserahkan paling lambat pada saat ybs masuk kuliah kembali. e. Tugas yang merupakan plagiat diberi nilai nol. f. Mahasiswa yang berlaku curang dalam ujian, ujiannya diberi nilai nol. g. Hal-hal lain yang tidak tercantum dalam norma akademik ini akan ditetapkan kemudian.
Matakuliah Syarat	Statistika Elementer

MINGGU KE	SUB-CP-MK	INDIKATOR	KRITERIA DAN BENTUK PENILAIAN	METODE PEMBELAJARAN	MATERI PEMBELAJARAN	BOBOT PENILAIAN (%)
1	• Memahami kontrak perkuliahan dan mengetahui ruang lingkup MK Statmat • Menjelaskan beberapa istilah dalam teori peluang • Menjelaskan definisi dari fungsi peluang • Menentukan peluang sebuah kejadian dengan menggunakan pendekatan frekuensi relatif dan pendekatan klasik • Menggunakan sifat-sifat peluang untuk menentukan peluang sebuah kejadian	• Kedisiplinan dalam melaksanakan kontrak kuliah • Ketepatan memahami materi terkait • Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas •	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Kontrak Peruliahan dan silabus • Istilah dan notasi dalam teori Peluang • Definisi Peluang • Frekuensi relative • Peluang Klasik • Seleksi Acak • Sifat-sifat Peluang	1
2	• Menghitung peluang bersyarat sebuah kejadian • Menggunakan hukum peluang total dan aturan Bayes untuk menentukan peluang sebuah kejadian	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Peluang bersyarat • Hk.Peluang Total • Aturan Bayes	2
3	• Mengidentifikasi kebebasan dua kejadian atau lebih dan menggu-nakan informasi mengenai kebe-basan dua kejadian untuk meng-hitung peluang kejadian lain • Mencacah banyaknya titik contoh	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Kejadian saling bebas • Tbeeknik Pencacahan (Kaidah Penggandaan, Permutasi, Kombinasi • Penentuan Peluang sebuah Kejadian	2

	• Menghitung peluang kejadian					
4	• Mendalami berbagai konsep peluang	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas • Nilai Ujian I	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Review Teori Peluang dan pembahasan soal-soal • UJIAN I	25
5	• Menjelaskan pengertian peubah acak, fkp dan cdf • Menentukan fkp&cdf pa diskret • Menentukan fkp dan cdf pa kontinu	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Pengertian PA • PA Diskret	2
6	• Menghitung nilai harapan dari sebuah peubah acak dengan memanfaat definisi nilai harapan dan sifat-sifatnya • Menentukan fungsi pembangkit mome (FPM)n dari sebuah peubah acak • Menentukan fungsi pembangkit momen faktorial(FPMF) dari sebuah peubah acak	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Sifat-sifat Nilai Harapan • FPM • FPMF	2
7	• Mengidentifikasikan pa seragam, bernoulli,binomial, hipergeometrik • Menentukan karakteristik dari pa seragam diskret, bernoulli, hipergeometrik • Menghitung peluang pa seragam diskret, bernoulli, hipergeometrik	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Seb.Seragam Diskret • Seb.Bernoulli • Seb.Binomial • Seb.Hipergeometrik	2
8	• Mengidentifikasi pa Poisson, geometrik dan binomial negatif • Menentukan karakteristik dari pa geometrik dan binomial negatif • Menghitung peluang pa eometrik dan binomial negatif	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Seb.Poisson • Seb.Geometrik • Seb Binomial negatif	2
9	• Mengidentifikasikan pa Seragam kontinu, Gamma • Menentukan karakteristik dari pa Seragam kontinu, Gamma	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Seb. Seragam Kontinu • Seb. Gamma	2

	• Menghitung peluang pa Seragam kontinu, Gamma	• Orisinalitas hasil tugas				
10	• Mengidentifikasikan pa Eksponensial dan Normal • Menentukan karakteristik dari pa eksponensial dan Normal • Menghitung peluang pa eksponensial dan Normal	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Seb.Eksponensial • Seb.Normal	2
11	• Mendalami masalah hitung peluang yang terkait dengan sebaran kontinu khusus	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Review Sebaran Kontinu Khusus • UJIAN II	25
12	• Menentukan fkp bersama dan fungsi peluang marjinal dari peubah acak ganda diskret • Menentukan fkp bersama, fungsi sebaran kumulatif dan fungsi peluang marjinal dari peubah acak ganda kontinu	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• PA Ganda diskret (fkp bersama, fkp marjinal dan cdf bersama, penentuan peluang • PA kontinu (fkp bersama, fkp marjinal dan cdf bersama, penentuan peluang)	2
13	• Menjelaskan konsep bebebasan peubah acak dan menghitung peluang bersyarat peubah ganda • Menghitung kovarians dan korelasi dari dua peubah acak • Menentukan FPM Bersama dari dua peubah acak	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Kebebasan peubah acak • Seb. Peluang bersyarat • Sift-sifat Nilai Harapan • Korelasi • FPM Bersama	2
14	• Menggunakan teknik CDF untuk mendapatkan fkp dari suatu pa yang merupakan fungsi dari pa lainnya yang telah diketahui fkp-nya • Menggunakan teknik transformasi utk mendapatkan fkp dari suatu pa merupakan fs dari pa lainya yang telah diketahui fkp-nya (Fs 1 ke 1)	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan tugas • Orisinalitas hasil tugas	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Teknik CDF • Teknik Transfor-masi (Fs. 1 ke 1)	2
15	• Menggunakan teknik transformasi utk mendapatkan fkp dari suatu pa merupakan fs dari pa lainya yang	• Ketepatan dalam menjawab soal tugas • Kerapihan pengerjaan	• Keaktifan • Tugas Rutin	Presentasi dan Diskusi	• Teknik Transformasi (bukan Fs. 1 ke 1) • Teknik FPM	2

	telah diketahui fkp-nya. (bukan fs 1 ke 1) • Menggunakan teknik FPM utk mendapatkan fkp dari sua-tu pa merupakan fs dari pa lainya yang telah diketahui fkp-nya	tugas • Orisinalitas hasil tugas				
16	**UJIAN AKHIR SEMESTER**					**25**

LOGO

STATISTIKA MATEMATIKA I

TEORI PELUANG

HAZMIRA YOZZA – IZZATI RAHMI HG
JURUSAN MATEMATIKA UNAND

Tujuan Instruksional Khusus

1. Menentukan ruang contoh sebuah percobaan dan kejadian-kejadian
2. Mencacah titik contoh
3. Menghitung peluang sebuah kejadian

Click to add Title

Definisi 1.1.
Himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan dinamakan ruang contoh (ruang sampel), dinotasikan dengan S. Anggota dari ruang contoh S dinamakan sebagai titik contoh. Catat bahwa satu dan hanya satu hasil yang akan terjadi pada suatu ulangan (trial) tertentu dari suatu percobaan.

Contoh

Misalkan dilakukan suatu percobaan berupa pelemparan dua koin dan diamati sisi dari koin yang muncul. Tentukan ruang contoh dari percobaan tersebut.

Contoh 1.2.

Misalkan pada Contoh 1.2.1. kita tidak tertarik pada hasil dari kedua koin tersebut, tetapi lebih tertarik untuk mencatat total banyaknya sisi angka yang muncul dari kedua koin tersebut. Tentukan ruang contoh yang sesuai.

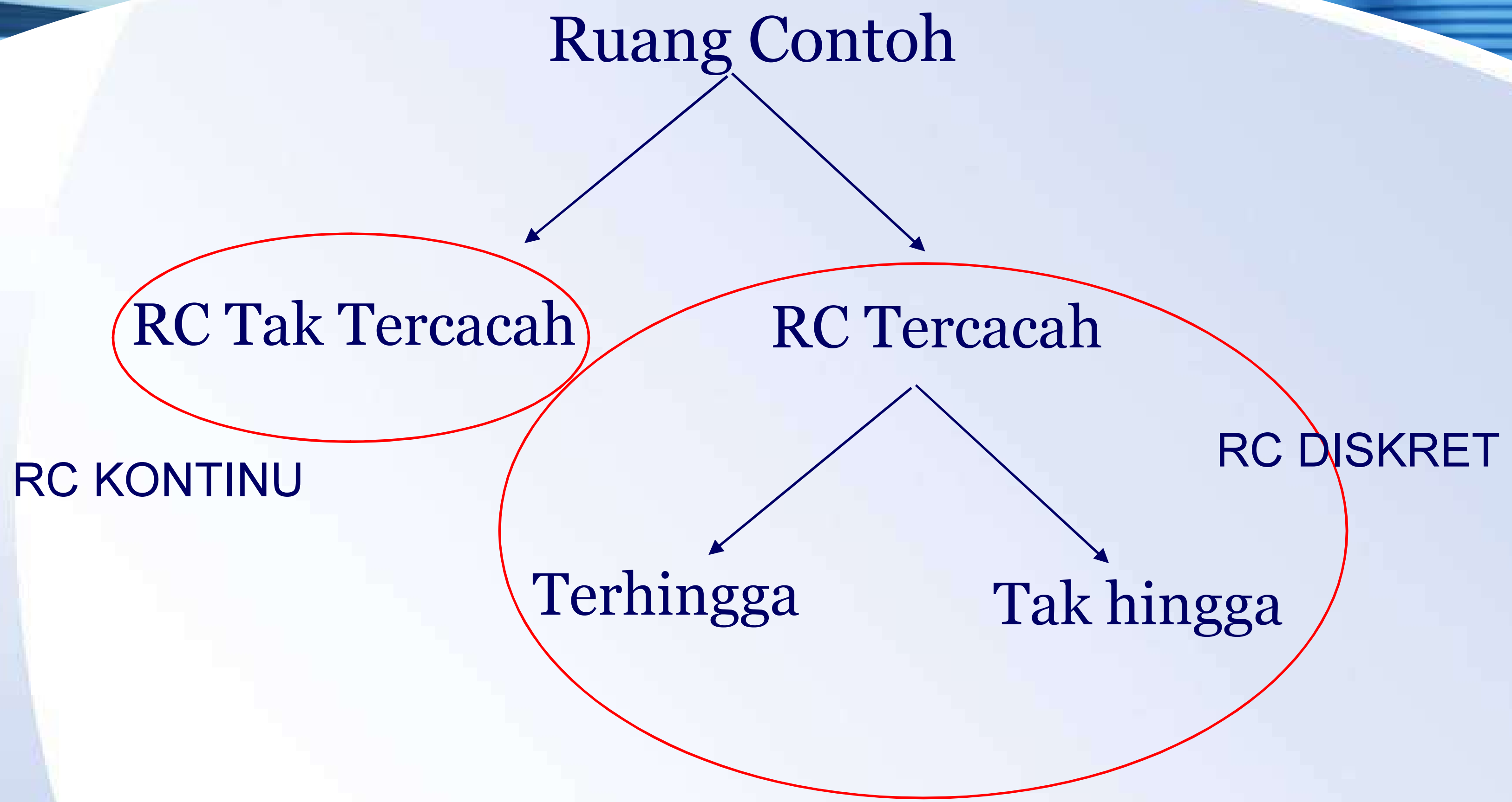
Contoh 1.3.

Sebuah koin dilemparkan berulangkali sampai munculnya sisi angka dan dicatat sisi yang muncul pada setiap lemparan. Tentukan ruang contoh yang sesuai. Bagaimana jika kita lebih tertatrik pada banyaknya lemparan yang harus dilakukan sampai munculnya sisi angka tersebut.

Contoh 1.4.

Sebuah bola lampu dihidupkan secara terus menerus dan dicatat waktu operasinya sampai padam yang sering istilahkan sebagai waktu ketahanan hidup (*survival time*) . Tentukan ruang contoh bagi percobaan ini.

TEORI HIMPUNAN



Definisi 1.2.
Jika suatu ruang contoh S terhingga maupun tercacah tak hingga, maka ruang contoh tersebut dinamakan ruang contoh diskret. Jika suatu ruang contoh dapat mengambil sembarang nilai pada suatu selang bilangan riil, maka ruang contohnya dinamakan ruang contoh kontinu.

Contoh 1.5.
Misalkan sebuah lampu diuji dan diukur X, jumlah cahaya yang dihasilkan (dalam lumen) dan Y, jumlah energi yang dihasilkan (dalam joule). Tentukan ruang contohnya.

Definisi 1.3.
Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang contoh. Jika A adalah kejadian, maka A dikatakan telah terjadi jika satu keluaran A telah terjadi.

OPERASI TERHADAP KEJADIAN

Gabungan

- Notasi : $A \cup B$
- Anggota : semua angg A atau angg B

Irisan

- Notasi : $A \cap B$
- Anggota : Angg bersama A dan B

Kompleman

- Notasi : A'
- Anggota : Angg S yang bukan angg A

Hazmira Yozza Jur. Matematika FMIPA Unand Izzati Rahmi HG

OPERASI TERHADAP HIMPUNAN

- **Kejadian A tapi bukan B**

$$A \cap B' = A - B$$

- **Kejadian tepat satu A atau B**

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

- **Kejadian tidak A maupun B**

$$A' \cap B'$$

Definisi 1.4.
Suatu kejadian dikatakan sebagai kejadian sederhana jika hanya berisi satu titik contoh dari percobaan

SETIAP KEJADIAN DAPAT DIBENTUK DARI GABUNGAN KEJADIAN-KEJADIAN SEDERHANA

Definisi 1.5.
Dua kejadian A dan B dikatakan saling lepas (*mutually exclusive*) jika $A \cap B = \varnothing$

- A dan B saling lepas → A dan B tidak memiliki titik contoh yang sama
- Dua kejadian berkomplemen adalah saling lepas (tidak sebaliknya)

Definisi 1.6.
Kejadian-kejadian A_1, A_2, A_3, ... dikatakan saling lepas jika setiap pasang kejadian tersebut saling lepas, yaitu jika $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$.

Definisi Peluang

Definisi 1.8.

Untuk suatu percobaan, misalkan S melambangkan ruang contoh dan A1, A2,... menyatakan kejadian-kejadian yang mungkin terjadi. Suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan yang memetakan kejadian ke himpunan nilai riil disebut sebagai fungsi peluang dan P(A) disebut peluang dari A jika memenuhi :

1. $P(A_i) \geq 0$ untuk setiap i
2. $P(S) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

   jika A1, A2,... saling lepas

Contoh

Keberhasilan penyelesaian sebuah proyek konstruksi mensyaratkan bahwa setiap peralatan bekerja sebagaimana mestinya. Asumsikan bahwa " berhasil" (A1) atau tidaknya proyek sangat tergantung pada satu dan hanya satu dari sebab-sebab berikut : "kegagalan mekanikal" (A2) atau "kegagalan elektikal" (A3). Misalkan bahwa kemungkinan terjadinya kegagalan mekanikal adalah tiga kali kemungkinan terjadinya kegagalan elektrikal dan kemungkinan bahwa proyek dapat diselesaikan adalah dua kali kemungkinan terjadinya kegagalan mekanikal. Tentukan peluang dari ketiga kejadian tersebut.

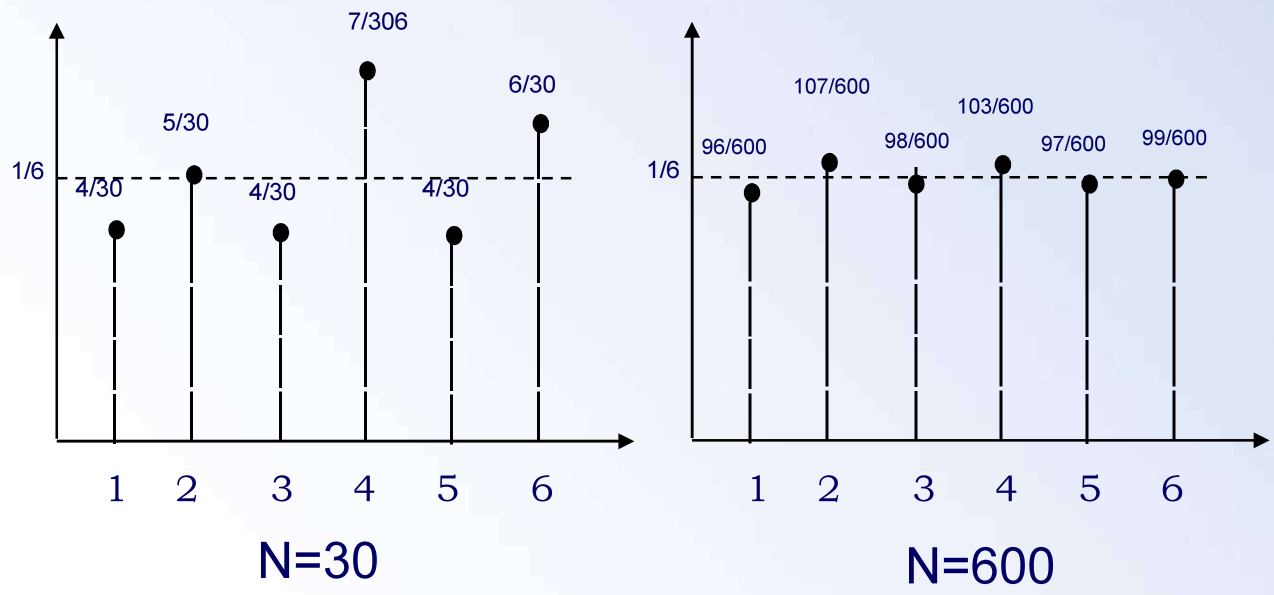
FREKUENSI RELATIF

- Salah satu pendekatan dalam menentukan peluang kejadian

- $$f_A = m(A)/M$$

- $$P(A) = \lim_{M \to \infty} f_A$$

Suatu percobaan berupa pelemparan sebuah dadu-bermata-enam biasa. Ruang contoh pada percobaan ini adalah S = {1,2,3,4,5,6}. Sebuah simulasi pelemparan dadu tersebut dilakukan dengan menggunakan fasilitas pembangkitan bilangan acak yang ada pada komputer.



Gunakan pendekatan frekuensi relatif untuk memperkirakan peluang munculnya mata 1, 2, ..., 6.

Ruang contoh diskret

- Penentuan nilai peluang pada ruang contoh diskret dapat direduksi menjadi penentuan nilai peluang kejadian-kejadian sederhana yang menyusunnya
- Misalkan e_1, e_2, …, e_N adalah kejadian-kejadian sederhana dalam RC S, dengan pi = P({ei}).
- Suatu kejadian A sebarang dapat dianggap sebagai gabungan dari beberapa kejadian sederhana dan karena kejadian-kejadian sederhana tersebut saling bebas, maka :

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} P(\{e_i\})$$

- Dua koin yang setimbang dilemparkan. Tentukan peluang kejadian C yaitu kejadian munculnya tepat satu sisi angka.

Peluang klasik

- Misalkan RC S berisi N keluaran yang berbeda $S=\{e_1,e_2, \ldots,e_N\}$. Dengan asumsi bahwa setiap keluaran memiliki peluang yang sama untuk muncul, maka : $p_1=p_2=\ldots=p_N$; $p_i = P(\{e_i\})$
- Karena total peluang adalah 1 maka :

  pi=1/N
- Dan karena $P(A)=\sum_{e_i\in A} P(\{e_i\})$ maka :

$$P(A)=\frac{n(A)}{N}$$

Seleksi Acak

Definisi 1.9

Jika sebuah objek diambil dari kumpulan terbatas objek yang berbeda sehingga setiap objek memiliki peluang yang sama untuk terambil, maka dikatakan bahwa objek tersebut diambil secara acak.

Jika suatu subset objek dipilih dengan suatu cara sehingga setiap subset berukuran sama memiliki peluang yang sama untuk terambil, maka dikatakan bahwa subset objek tersebut diambil secara acak.

Contoh : pengambilan satu kartu dari seperangkat kartu

SIFAT-SIFAT PELUANG

Teorema 1.1.

Jika A adalah suatu kejadian dan A′ adalah komplemen dari kejadian A, maka :

$$P(A) = 1 - P(A')$$

Contoh

Dilakukan sebuah percobaan berupa pelemparan sebuah koin empat kali. Tentukan peluang kejadian A yang didefinisikan sebagai kejadian munculnya sisi angka paling tidak satu kali.

Teorema 1.2.

Untuk setiap kejadian A, $P(A) \leq 1$.

Teorema 1.3.

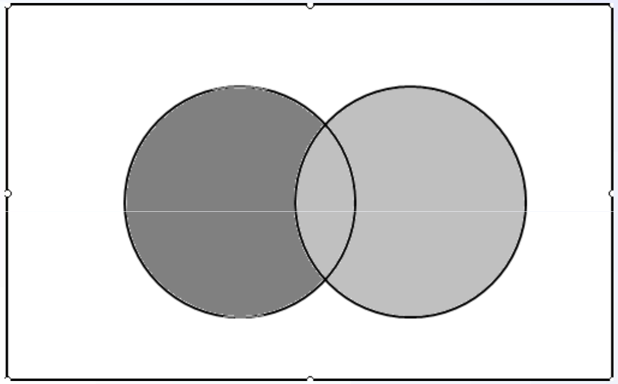
Untuk sembarang kejadian A dan B berlaku :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

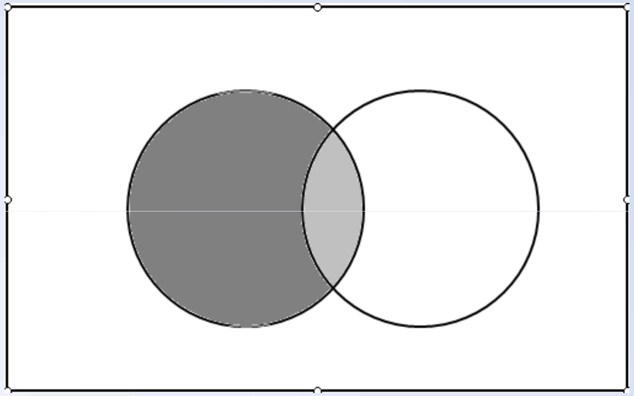
Teorema 1.3.

Untuk sembarang kejadian A dan B berlaku :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$A \cup B = (A \cap B') \cup B$



$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

Setelah dikocok, satu buah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu yang terdiri dari 52 kartu. Didefinisikan kejadian A sebagai kejadian terambilnya kartu "as merah" dan B sebagai kejadian terambilnya kartu "hati". Tentukan peluang terambilnya kartu as merah atau kartu hati.

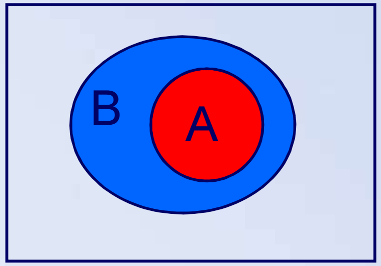
Teorema 1.4.

Untuk sembarang kejadian A,B dan C, berlaku

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Teorema 1.5.

Jika $A \subset B$ **maka P(A) ≤ P(B)**



Teorema 1.6.

Ketaksamaan Boole. Jika A1, A2,   adalah sekuens kejadian, maka :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorema 1.7.

Ketaksamaan Bonferroni. Jika A1, A2, ..., Ak adalah kejadian-kejadian, maka

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{k} P(A_i`)$$

KASUS

Suatu kotak berisi 100 microchip (keping mikro). Sebahagian microchip tersebut diproduksi oleh pabrik-A dan sebahagian lainnya diproduksi di pabrik B. Dari keseluruhan microchip tersebut, beberapa di antaranya tidak berfungsi dengan baik. Pada tabel berikut disajikan jumlah microchip pada masing-masing kategori.

	Pabrik-1	Pabrik 2	Total
Rusak	15	5	20
Baik	45	35	80
Total	60	40	100

Suatu percobaan dilakukan dengan mengambil secara acak satu microchip dari dalam kotak (peneliti mengetahui jumlah microchip pada masing-masing ketegori tapi tidak mengetahui posisi microchip (rusak/tidak rusak, dari pabrik-1/pabrik2). Berapa peluang terambilnya yang rusak

	Pabrik-1 (B)	P lain (B’)	Total
Rusak (A)	15	5	20
baik (A’	45	35	80
Total	60	40	100

A adalah kejadian terambilnya microchip yang rusak
B adalah kejadian terambilnya microchip yang diproduksi pabrik-1

Definisi 1.10.

Peluang bersyarat dari kejadian A, dengan syarat kejadian B didefinisikan sebagai :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

jika $P(B) \neq 0$

Secara umum berlaku :

- $P(A|B) = 1 - P(A`|B)$
- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A_1 \text{ Ù } A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2\, |B)$

Teorema Penggandaan Peluang

Teorema 1.7.

Untuk sembarang kejadian A dan B berlaku

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$$

Bukti :

Teorema ini merupakan akibat langsung dari definisi peluang bersyarat

Contoh :

Dua kartu diambil satu persatu tanpa pengembalian dari seperangkat kartu. Tentukan peluang terambilnya dua kartu as.

Hukum Peluang Total

Teorema 1.8.

Peluang Total. Jika B1, B2,….,Bk adalah kejadian-kejadian yang saling lepas dan bersifat exhaustive, maka untuk setiap sebarang kejadian A berlaku :

$$P(A) = \sum_{i}^{k} P(B_i)\,P(A \mid B_i)$$

Bukti :

B_1, B_2,…,B_k dikatakan exhaustive bila B_1Ù B_2Ù…Ù,B_k = S

A = A ∩ S = A ∩ (B_1Ù B_2Ù…Ù,B_k)

= (A ∩ B_1) Ù (A ∩ B_2) Ù … Ù(A ∩ B_k)

$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k = \emptyset \rightarrow (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) \cap \ldots \cap (A \cap B_k) = \emptyset$

$$\rightarrow \quad P(A) = \sum_{i}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i}^{k} P(B_i)(A \mid B_i)$$

CONTOH

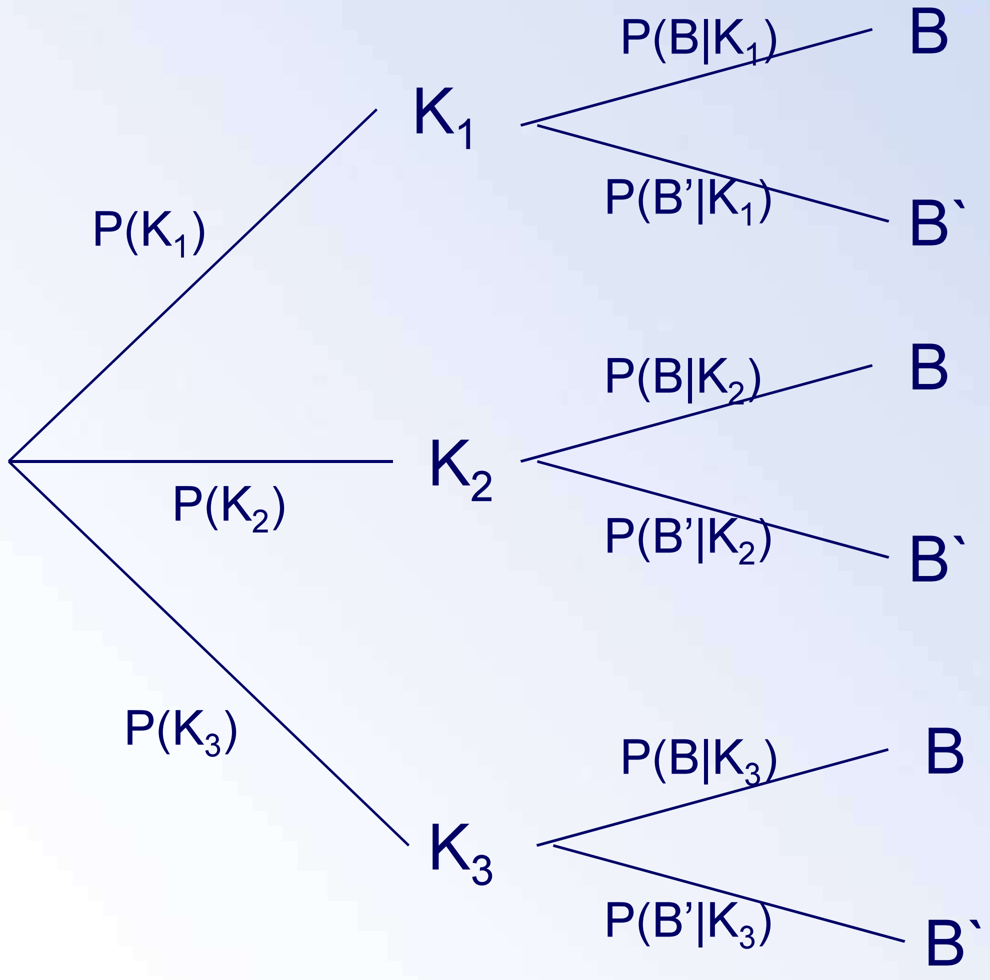
(Perhatikan contoh sebelumnya). Pabrik 1 memiliki 2 shift. Microchip dari pabrik 1 dapat dikelompokkan berdasarkan pada shift mana microchip tersebut dihasilkan. 100 Microchip dipisahkan dalam 3 kotak.

Kotak 1 berisi 25 microchip dari shift 1
Kotak 2 berisi 35 microchip dari shift 2
Kotak 3 berisi 40 microchip dari pabrik 2

Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3
5 rusak	10 rusak	5 rusak
20 baik	25 baik	35 baik

Percobaan dilakukan dengan terlebih dahulu memilih secara acak salah satu kotak, kemudian dari kotak yang terpilih, diambil pula secara acak satu buah microchip. Tentukan peluang terambilnya microchip yang rusak. Tentukan pula peluang terambilnya microchips yang tidak rusak

Diagram Pohon



Sebuah kartu diambil dari tumpukan kartu yang terdiri dari 52 kartu kemudian diletakkan di atas tumpukan kartu yang kedua. Sebuah kartu diambil dari tumpukan kartu yang kedua.

a. **Berapa peluang terambilnya kartu as pada pengambilan pertama**
b. **Jika pada pengambilan pertama terambil kartu as, berapa peluang pada pengambilan kedua juga terambil kartu as**
c. **Berapa peluang kedua kartu yang terambil adalah kartu as**
d. **Berapa peluang terambilnya kartu as pada pengambilan kedua**
e. **Jika diketahui pada pengambilkan kedua , terambil kartu as, berapa peluang pada pengambilan pertama terambil kartu bukan as**

Suatu kantong berisi tiga koin, salah satu di antaranya adalah koin setimbang, sedangkan yang lainnya adalah koin tidak setimbang sehingga peluang munculnya sisi angka adalah dua kali peluang munculnya sisi gambar. Sebuah koin diambil secara acak dari kantong tersebut dan dilempar serta dicatat sisi yang muncul.

a. **Tentukan peluang tembalinya koin setimbang**
b. **Tentukan peluang munculnya sisi angka jika diketahui bahwa koin yang teambil adalah koin tidak setimbang**
c. **Tentukan peluang munculnya sisi gambar**
d. **Jika diketahui sisi gambar yang muncul, tentukan peluang bahwa koin yang terambil adalah koin yang tidak setimbang**

Aturan Bayes

Teorema 1.9.

Jika diasumsikan kondisi pada Teorema 1.8 terpenuhi, maka untuk setiap j = 1,2,…,k

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

Bukti :

Dari definisi peluang bersyarat dan teorema peluang total diketahui bahwa :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B_j} \mid \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B_j})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B_j})\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B_j})}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{B_i})\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B_i})}$$

CONTOH

(Perhatikan contoh sebelumnya). Pabrik 1 memiliki 2 shift. Microchip dari pabrik 1 dapat dikelompokkan berdasarkan pada shift mana microchip tersebut dihasilkan. 100 Microchip dipisahkan dalam 3 kotak.

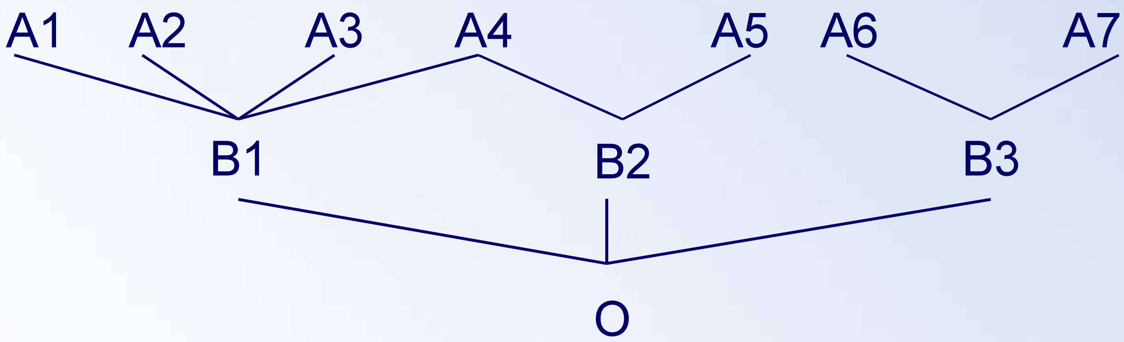
Kotak 1 berisi 25 microchip dari shift 1
Kotak 2 berisi 35 microchip dari shift 2
Kotak 3 berisi 40 microchip dari pabrik 2

Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3
5 rusak	10 rusak	5 rusak
20 baik	25 baik	35 baik

Percobaan dilakukan dengan terlebih dahulu memilih secara acak salah satu kotak, kemudian dari kotak yang terpilih, diambil pula secara acak satu buah microchip. Bila diketahui bahwa yang terambil adalah microchip yang rusak, tentukan peluang bahwa microchip tersebut terambil dari kotak 1

CONTOH

Seorang laki-laki mengadakan perjalanan mulai dari kota O. Pertama ia memilih sebuah jalur secara acak dari kota O tersebut ke kota B1, B2 atau B3. Dari kota tersebut, ia memilih lagi jalur baru ke kota A1, A2, … atau A7. Kemungkinan jalan yang dipilihnya seperti pada gambar berikut



a. Tentukan peluang bahwa ia memilih melewati kota B3
b. Bila diketahui ia memilih jalur ke kota B1, tentukan peluang ia akan sampai di kota A4
c. Tentukan peluang ia akan sampai di kota A4
d. Bila diketahui bahwa laki-laki tersebut telah sampai di kota A4, tentukan peluang bahwa ia melewati kota B2

Satu bola diambil dari sebuah wadah yang berisi 3 bola merah, dan 7 bola biru. Jika terambil bola merah, percobaan dilanjutkan dengan pelemparan satu buah mata uang sebanyak 2 kali. Namun jika terambil bola biru, percobaan dilanjutkan dengan pelemparan mata uang sebanyak 3 kali.

Tentukan :

a. Peluang terambilnya bola merah
b. Peluang sisi angka muncul 2 kali jika diketahui pada pengambilan bola terambil bola merah
c. Peluang sisi angka muncul 2 kali jika diketahui pada pengambilan bola terambil bola biru
d. Peluang munculnya sisi angka 2 kali
e. Jika diketahui bahwa sisi angka muncul 2 kali, tentukan peluang bahwa yang terambil adalah bola berwarna merah

Kejadian-kejadian Bebas

Definisi 1.11.

Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian yang saling bebas jika :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Teorema 1.10.

Jika A dan B adalah kejadian-kejadian, sehingga $P(A)>0$ dan $P(B)>0$, maka A dan B saling bebas jika dan hanya jika memenuhi :

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{atau } P(B|A)=P(B)$$

CONTOH

Suatu “sistem” terdiri dari dua komponen yang dirangkai dengan suatu konfigurasi tertentu. Seringkali diasumsikan bahwa kegagalan suatu komponen tidak berpengaruh terhadap kemungkinan gagalnya komponen lainnya. Jadi kegagalan suatu komponen diasumsikan saling bebas dengan kegagalan komponen lainnya. Diketahui bahwa peluang komponen 1 gagal adalah 0.1 dan peluang komponen kedua gagal adalah 0.2. Tentukan peluang bahwa ”sistem” tersebut berfungsi, jika kedua komponen dirangkai (a) seri (b) paralel.

Teorema 1.11.

Dua kejadian A dan B saling bebas jika dan hanya jika pasangan kejadian ini juga saling bebas

1. A dan B`
2. A` dan B
3. A` dan B`

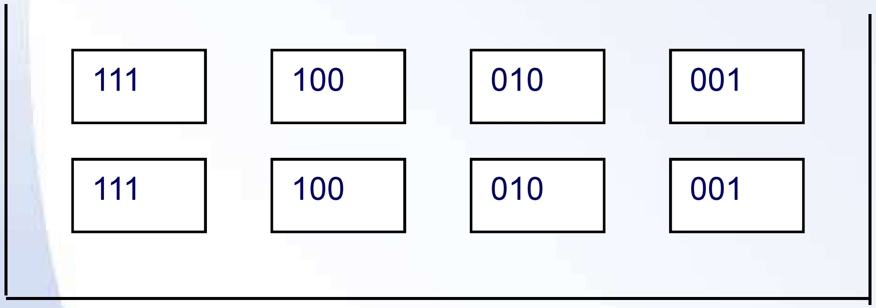
Definisi 1.12.

Kejadian A_1, A_2, …, A_k dikatakan saling bebas atau mutually independent jika untuk setiap j = 2,3,…,k dan setiap subset dari i_1, i_2,…, i_j yang berbeda,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_j})$$

cOnTOH

Sebuah kotak berisi 8 tiket yang diberi label dengan bilangan biner. Dua tiket diberi label 111, dua tiket diberi label 100, dua 010 dan dua 001. Suatu percobaan dilakukan dengan mengambil satu tiket secara acak dari kotak. Nyatakan A sebagai kejadian " digit pertama 1", B sebagai kejadian "digit kedua 1" dan C sebagai kejadian "digit ketiga 1". Kondisi ini diilustrasikan pada Gambar 1.9. Periksa apakah ketiga kejadian tersebut saling bebas.



a. Apakah ketiga kejadian saling bebas.

b. Misalkan kita mengganti nomor pada satu tiket pada kolom pertama dari 111 menjadi 110 dan satu nomor tiket dari kolom kedua dari 100 menjadi 101. Periksa apakah ketiga kejadian saling bebas.

TEKNIK PENCACAHAN

KAIDAH PENGGANDAAN

Jika suatu operasi dapat dilakukan dalam n1 cara dan jika untuk setiap cara pada operasi pertama, operasi kedua dapat dilakukan dalam n2 cara, maka secara bersamaan kedua operasi tersebut dapat dilakukan dalam n1 n2 cara

CONTOH

Berapa banyak hasil percobaan yang terdiri dari pelemparan sebuah koin dan pengambilan sebuah kelereng dari kotak yang berisi kelereng hitam (H), biru (B) dan merah (M).

Kaidah penggandaan untuk r operasi

Jika operasi ke i dari r operasi yang berurutan dapat dilakukan dalam n_i cara, maka secara bersamaan r operasi tersebut dapat dilakukan dalam

$$\prod_{i=1}^{r} n_i = n_1 n_2 \ldots n_r$$

Teorema 1.12.

Jika terdapat N kemungkinan hasil untuk setiap ulangan dalam suatu percobaan, maka dalam r ulangan terdapat N^r kemungkinan hasil dalam ruang contoh

Contoh :

- Berapa cara untuk menjawab 20 pertanyaan Benar-Salah?
- Berapa banyak himpunan bagain dari suatu himpunan yang berisi m unsur?
- Lima kartu diambil dengan pengembalian dari seperangkat kartu (52 kartu). Ada berapa kemungkinan hasil yang mungkin?

Contoh :

- Lima kartu diambil dengan pengembalian dari seperangkat kartu (52 kartu). Ada berapa kemungkinan hasil yang mungkin? BILA PENGAMBILAN DILAKUKAN TANPA PENGEMBALIAN???

Teorema 1.14.

Banyaknya permutasi dari n objek yang berbeda adalah n!

Teorema 1.15.

Banyaknya permutasi dari r objek yang diambil dari n objek yang berbeda adalah :

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh :

Sebuah kotak berisi 9 tiket, yang ditulisi angka 1,2,3,...,9. Tiga tiket diambil secara acak tanpa pengembalian dari kotak tersebut. Berapa banyak kemungkinan bilangan yang dapat dibentuk berdasarkan tiket-tiket yang terambil? Berapa peluang memperoleh tiket yang memiliki angka-angka bulat yang berurutan. Bagaimana kalau dengan pengembalian?

Teorema 1.15

Banyaknya kombinasi yang terdiri dari r objek yang diambil dari n benda yang berbeda adalah :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh :

Berapa cara memilih 4 dari 10 anak pramuka untuk dikirim ke jambore internasional bila diketahui kesepuluh anak tersebut memiliki kemampuan yang setara.

PERMUTASI OBJEK-OBJEK SEJENIS

Misalkan objek A1, A2, A3, B

Banyak cara menyusun = 4! = 24

A1 A2 A3 B	**A1 A2 B A3**	**A1 B A2 A3**	**B A1 A2 A3**
A1 A3 A2 B	**A1 A3 B A2**	**A1 B A3 A2**	**B A1 A3 A2**
A2 A1 A3 B	**A2 A1 B A3**	**A2 B A1 A3**	**B A2 A1 A3**
A2 A3 A1 B	**A2 A3 B A1**	**A2 B A3 A1**	**B A2 A3 A1**
A3 A1 A2 B	**A3 A1 B A2**	**A3 B A1 A2**	**B A3 A1 A2**
A3 A2 A1 B	**A3 A2 B A1**	**A3 B A2 A1**	**B A3 A2 A1**

Misalkan A1 = A2 = A3 = A. Susunannya menjadi :

AAAB **AABA** **ABAA** **BAAA**

Banyak cara = 4 cara = 24/6 =4!/3!

Byk cara menyusun A1 A2 A3

PERMUTASI OBJEK-OBJEK SEJENIS

Misalkan objek A1, A2, A3, B1, B2

Banyak cara menyusun = 5!

Misalkan A1=A2=A3=A

B1 = B2 = B

Jadi terdapat 3 A dan 2 B

Banyaknya cara menyusun = 5!/?

Byk cara menyusun A1 A2 A3 dan B1 B2 shg dihasilkan susunan yang sama

Perhatikan kemungkinan AAABB. Susunan ini diperoleh dr :

A1 A2 A3 B1 B2 = A1 A2 A3 B2 B1

A1 A3 A2 B1 B2 = A1 A3 A2 B2 B1

A2 A1 A3 B1 B2 = A2 A1 A3 B2 B1

A2 A1 A3 B1 B2 = A2 A1 A3 B2 B1

A3 A1 A2 B1 B2 = A3 A1 A2 B2 B1

PERMUTASI OBJEK-OBJEK SEJENIS

Teorema 1.16.
Banyaknya permutasi berbeda dari n objek dimana r objek diantaranya sejenis dan n-r objek lainnya berjenis lain adl :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Teorema 1.17.
Banyaknya permutasi dari n objek dengan r1 obek berjenis pertama, r2 objek berjenis kedua, ..., rk objek berjenis ke k adalah :

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

CONTOH

Anda memiliki 10 buah kelereng, dua hitam, tiga putih dan lima merah, namun selain itu, tidak ada yang membedakan kelereng-kelereng tersebut. Tentukan banyak permutasi yang berbeda yang dapt dibentuk dari kelereng-kelereng tersebut.

Teorema 1.18.

Banyaknya cara menyekat n buah objek ke dalam k sel dengan r1 objek pada sel pertama, r2 objek pada sel kedua dan seterusnya adalah :

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$

$$(r_1 + r_2 + \ldots + r_k) = n$$

Contoh :

Dua belas krayon yang berbeda warna akan dibagikan kepada empat orang anak dalam jumlah yang sama. Ada berapa cara yang mungkin?

Permutasi Objek Melingkar

Banyaknya cara menyusun n objek secara melingkar adalah (n-1)!

Contoh :

Lima orang duduk mengelilingi sebuah meja bundar. Berapa cara yang dapat mereka lakukan

Lima belas orang hadir di sebuah ruangan. Jika pada ruangan tersebut tersedia 3 meja bundar yang masing-masingnya dikelilingi oleh 6 buah kursi, barapa cara berbeda yang dapat dilakukan untuk menyusun lima belas orang tersebut pada kursi-kursi yang tersedia

PENGHITUNGAN PELUANG

Contoh 1.

Seorang siswa menjawab 20 soal Benar-Salah secara acak. Peluang untuk mendapatkan nilai 80? Nilai 100? (Catatan : setiap soal bernilai 5)

Contoh 2. Pengambilan Contoh Tanpa Pengembalian

Suatu kotak berisi 10 kelereng hitam dan 20 kelereng putih. Lima kelereng dipilih dipilih tanpa pengembalian. Tentukan peluang mendapatkan tepat dua kelereng hitam

Contoh 3. Pengambilan contoh dengan Pengembalian

Jika lima kelereng pada Contoh 1.30 diambil dengan pengembalian, tentukan peluang terpilihnya 2 kelereng hitam dan 3 kelereng putih.


LOGO

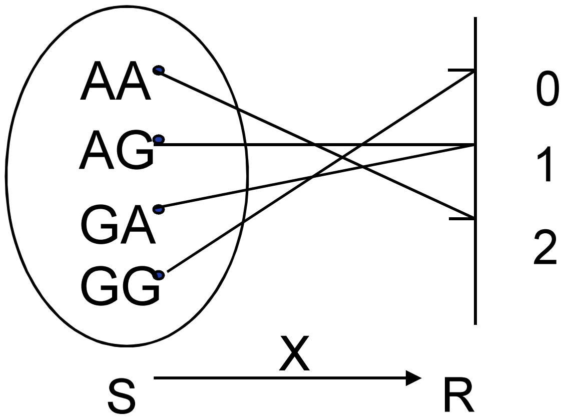
STATISTIKA MATEMATIKA I

PEUBAH ACAK DAN SEBARANNYA

Hazmira Yozza – Izzati Rami HG
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Definisi Peubah Acak

Percobaan : Pelemparan dua mata uang



Definisi 2.1.
Peubah acak. Suatu peubah acak, sebut saja X, adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu ruang contoh S, yang menghubungkan setiap titik contoh e dalam S dengan suatu bilangan riil, X(e) = x.

- Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital; nilai yang mungkin bagi peubah acak (range-nya) dinotasikan dengan huruf kecil yang bersesuaian

- Banyak peubah acak yang dapat didefinisikan untuk suatu percobaan tertentu

Percobaan : Pelemparan dua buah dadu bersisi 6

DEFINISI PEUBAH ACAK

- Banyak peubah acak yang dapat didefinisikan untuk suatu percobaan tertentu

  Percobaan : Pelemparan dua buah dadu bersisi 6

  Peubah acak : Jumlah dua sisi yang muncul

  Selisih dua sisi yang muncul

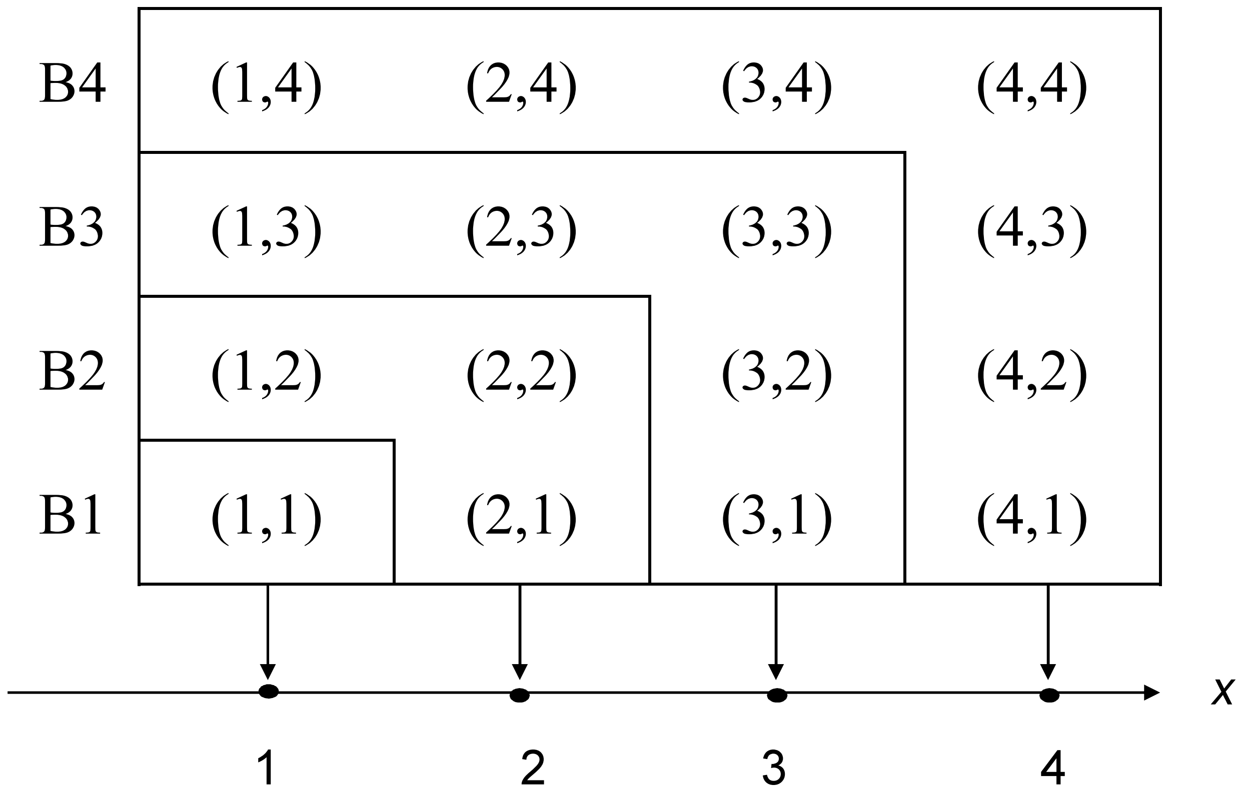
  Rasio kedua sisi

- Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital; nilai yang mungkin bagi peubah acak (range-nya) dinotasikan dengan huruf kecil yang bersesuaian

Contoh

Sebuah dadu tetrahedral (empat sisi) memiliki mata, 1, 2, 3 dan 4 pada masing-masing sisi. Untuk suatu pelemparan dadu, keempat mata dadu tersebut memiliki kemungkinan yang sama untuk muncul. Suatu permainan dilakukan dengan melempar dadu dua kali. Skor dinyatakan sebagai nilai maksimum dari 2 angka yang muncul.

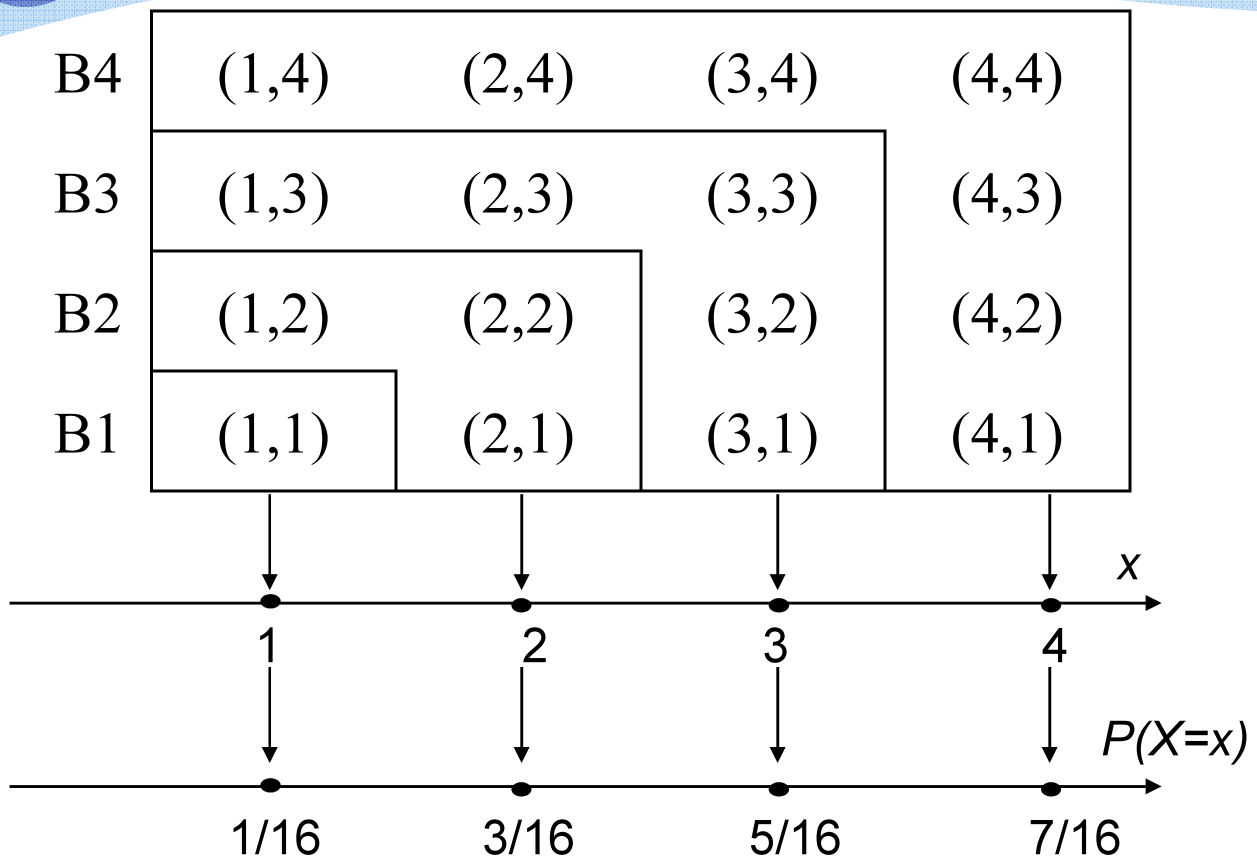
Jika $e = (i,j)$; $i, j \in \{1,2,3,4\}$, maka $X(e) = \max(i,j)$.



CATATAN : DAPAT DIDEFINISIKAN ACAK LAIN

FUNGSI PELUANG PEUBAH ACAK

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad P_X(X = x_i) = P(\{e_j \in S; X(e_j) = x_i)$$



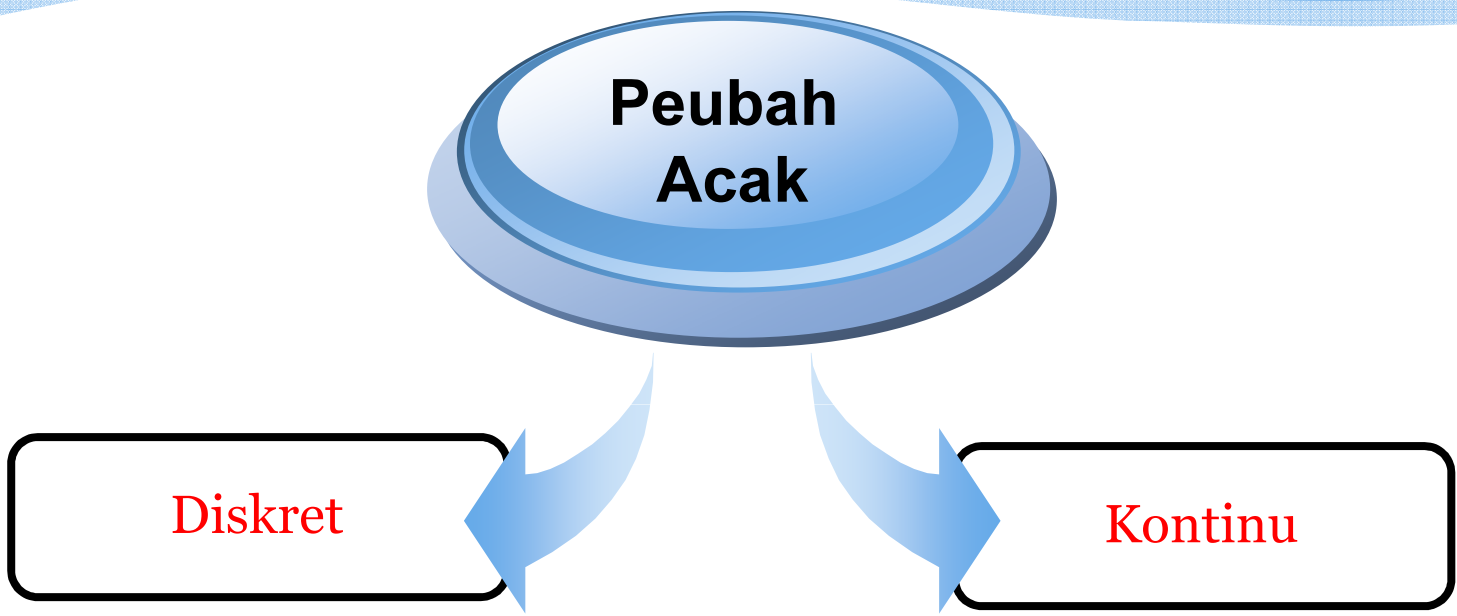
x	P(X=x)
1	1/16
2	3/16
3	5/16
4	7/16

$$P(X = x_i) = (2x - 1)/16 \qquad x = 1, 2, 3, 4$$

Contoh

- Sebuah koin setimbang dilemparkan 3 kali. Didefinisikan X sebagai banyaknya sisi angka yang muncul. Tentukan fungsi peluang bagi peubah acak X
- Seorang peserta ujian menjawab 20 soal Benar – Salah secara sembarang. Tentukan fungsi peluang bagi banyaknya soal yang dijawab benar.

Peubah acak diskret dan kontinu



Definisi PA Diskret

Definisi 2.2.
Jika himpunan semua nilai yang mungkin bagi peubah acak X adalah himpunan yang tercacah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atau $x_1, x_2, \ldots$, maka X dinamakan peubah acak diskret. Fungsi :

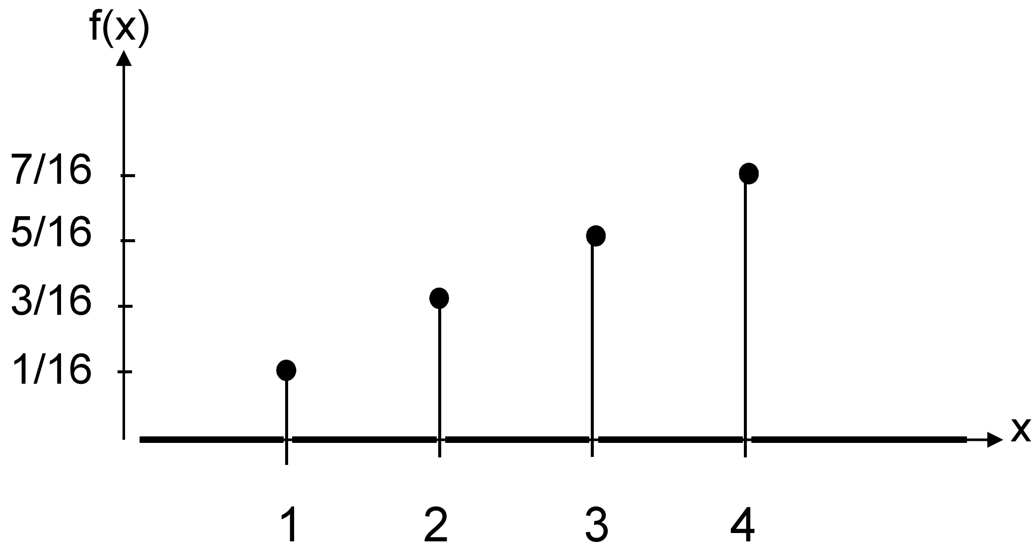
$$f(x) = P(X=x) \qquad x = x_1, x_2, \ldots$$

yang memasangkan setiap nilai x dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskret(fkp diskret)

X : Nilai maksimum yang muncul pada pelemparan dua dadu tetrahedral

x	P(X=x)
1	1/6
2	3/16
3	5/16
4	7/16

$$P(X = x_i) = (2x - 1)/16 \qquad x = 1,2,3,4$$



Teorema 2.1.

Suatu fungsi f(x) merupakan fkp diskret jika dan hanya jika untuk suatu himpunan bilangan riil tak hingga yang tercacah x1, x2, ... terpenuhi kedua sifat berikut:

$$f(xi) \geq 0$$

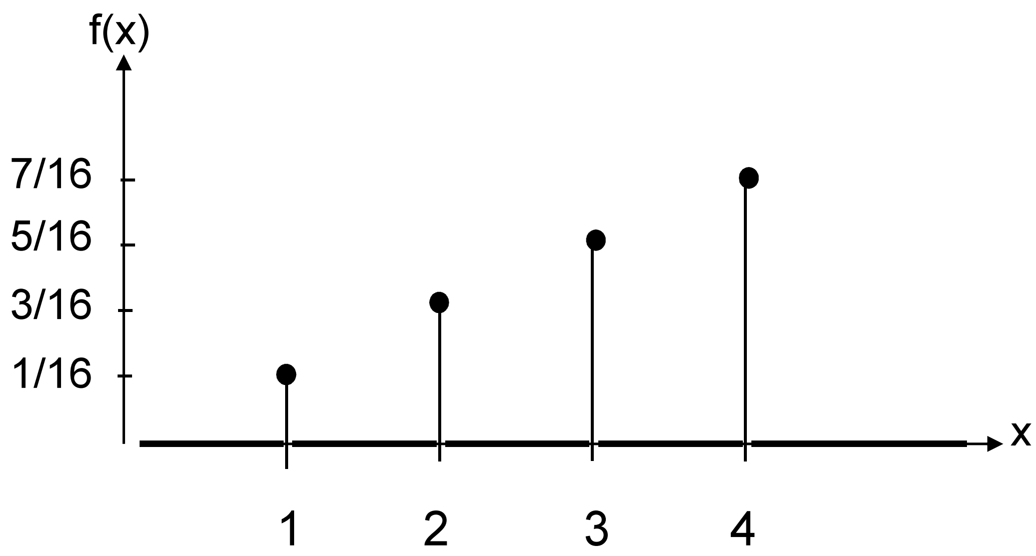
untuk setiap xi, dan

$$\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1$$

X : Nilai maksimum yang muncul pada pelemparan dua dadu tetrahedral

x	P(X=x)
1	1/16
2	3/16
3	5/16
4	7/16

$$P(X = x_i) = (2x - 1)/16 \qquad x = 1,2,3,4$$



$$\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1$$

Contoh

Sebuah dadu bersisi 12 (dodecahedral) yang setimbang digelindingkan dua kali. Tentukan fungsi kepekatan peluang dai X yang menyatakan maksimum angka yang muncul pada dua kali lemparan tersebut.

DEFINISI 2.3

Fungsi sebaran kumulatif (cumulative distribution function/cdf) dari suatu peubah acak X, dilambangkan dengan $F_X(x)$ didefinisikan oleh :

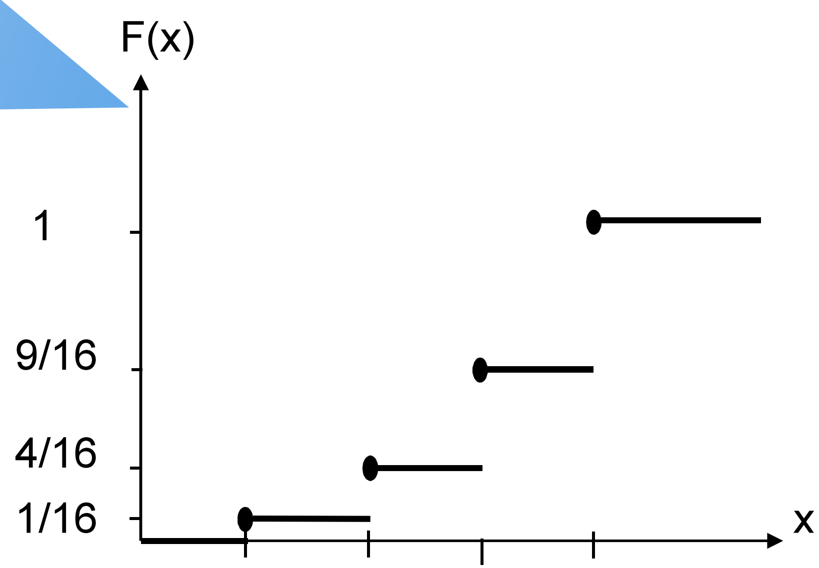
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

untuk setiap nilai riil x

X : Nilai maksimum pada pelemparan 2 dadu tetrahedral

x	P(X=x)
1	1/16
2	3/16
3	5/16
4	7/16

x	$F_X(x)$
(-∞,1)	0
[1,2)	1/16
[2,3)	4/16
[3,4)	9/16
[4,∞	1



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ 1/16 & x \in [1,2) \\ 4/16 & x \in [2,3) \\ 9/16 & x \in [3,4) \\ 1 & x \in [4, \infty) \end{cases}$$

tdk hanya dlm X, jump at xεX, bsr jump sama dg peluang, kont knn

Teorema 2.2.

Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fkp $f(x)$ dan CDF $F(x)$. Jika nilai-nilai yang mungkin dari X diberi ditata dalam urutan yang menaik, sehingga $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, maka $f(x_1) = F(x_1)$ dan untuk suatu $i > 1$

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Lebih lanjut, jika $x < x_1$, maka $F(x) = 0$ dan untuk setiap bilangan riil x lainnya

$$F(x) = \sum_{xi \le x} f(x_i)$$

dimana penjumlahan dilakukan pada semua titik i sehingga $xi \le x$.

Teorema 2.3:

Suatu fungsi F(x) adalah CDF untuk suatu peubah acak X jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{h \to o^{+}} F(x+h) = F(x)$
4. $a < b$ berimplikasi bahwa $F(a) < F(b)$

Nilai harapan

Definisi 2.4.

Jika X merupakan peubah acak diskret dengan fkp f(x), maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh :

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$$

Suatu kotak berisi empat kepingan. Dua keping diberi label angka 2, satu keping diberi label angka 4 dan yang lain dengan 8. Suatu percobaan dilakukan dengan mengambil satu keping secara acak dari kotak dan angka yang muncul dicatat. Tentukan nilai harapan dari X = nomor keping yang diambil

Suatu permainan dilakukan dengan mengambil dua kepingan secara acak tanpa pengembalian dari kotak seperti pada contoh sblmnya. Jika keping yang terambil bernomor sama, maka pemain menang \$2 dan jika tidak ia kalah \$1. Nyatakan X sebagai besarnya kemenangan pemain dalam satu kali permainan. Berapa nilai harapan kemenangan pemain tersebut

PEUBAH ACAK KONTINU

Definisi :

Peubah acak X dinamakan peubah acak kontinu peubah acak tersebut dapat mengambil semua nilai pada suatu selang tertentu

Definisi :

Suatu peubah acak X adalah kontinu jika F(x) merupakan fungsi yang kontinu dalam x. Peubah acak X adalah diskret jika F(x) merupakan fungsi tangga dalam x.

Definisi 2.5.

Suatu peubah acak X dikatakan peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi *f(x)* yang dinamakan fungsi kepekatan peluang (fkp) sehingga CDF dapat dinyatakan sebagai :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F`(x)$$

Definisi :

Peubah acak X dan Y memiliki sebaran yang identik jika untuk setap himpunan A, $P(X \in A) = P(Y \in A)$

Teorema :

Dua pernyataan ini adalah ekuivalen :

a. Peubah acak X dan Y memiliki sebaran yang sama
b. $F_X(x) = F_Y(y)$ untuk setiap x

Teorema 2.4.

Fungsi $f(x)$ adalah fkp bagi suatu peubah acak yang kontinu jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut ini:

$$f(x) \geq 0$$

untuk semua bilangan riil x, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Contoh : Tentukan apakah $f(x)=1/2$ untuk $0<x<2$ adalah fkp kontinu

Tentukan CDF $F(x)$ dari peubah acak X dengan fkp tersebut

Tentukan c sehingga $f(x) = cx^2$ untuk $0<x<3$ adalah fkp kontinu

Definisi 2.6.

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fkp f(x), maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- jika integral tersebut konvergen mutlak. Selainnya, dikatakan bahwa *E(X)* tidak ada.

Sebuah mesin memproduksi kawat tembaga. Kadang-kadang terdapat sebuah kerusakan pada beberapa titik sepanjang kawat tersebut. Panjang kawat (dalam meter) antara dua kerusakan adalah suatu peubah acak yang kontinu dengan fkp :

$$f(x) = \begin{cases} c(1+x)^{-3} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

dengan c konstanta. Tentukan nilai c. Tentukan $P(0.40<X<0.45)$

Definisi : Jika fungsi kepekatan pelung mempunyai nilai maksimum yang unik pada x = mo, dituliskan max f(x) = mo maka mo dikatakan modus dari sebaran X.

Contoh : Tentukan modus dari sebaran peubah acak X yang memiliki fkp

$$f(x) = \left(\frac{2}{9}\right) x e^{-(x/3)^2} \qquad x > 0$$

Sifat-sifat Nilai Harapan

Teorema 2.5.
Jika X adalah peubah acak dengan fkp *f(x)* dan *u(x)* adalah suatu fungsi bernilai riil yang memiliki daerah asal masuk ke dalam nilai-nilai yang mungkin bagi X, maka :

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) f(x) \qquad \text{jika X diskret}$$

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx \qquad \text{jika X kontinu}$$

Contoh : Peubah acak X memiliki fkp $f(x) = \begin{cases} x/8 & x = 1,2,5 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$

Tentukan E(X) dan E(2X+3)

Teorema 2.6.

Jika X adalah peubah acak dengan fkp *f(x)*, a dan b adalah konstanta, g(x) dan h(x) adalah suatu fungsi bernilai riil yang memiliki daerah asalnya mencakup nilai-nilai yang mungkin bagi X, maka :

$$E[a\,g(X) + b\,h(X)] = a\,E[g(X)] + b\,E[h(X)]$$

Akibat teorema :

$$E[a\,X + b] = a\,E[X] + b$$

Contoh : Peubah acak X memiliki fkp $f(x) = \begin{cases} x/8 & x = 1,2,5 \\ 0 & x \ lainnya \end{cases}$

Tentukan E(X) dan E(2X+3)

Ragam

Definisi 2.9. Ragam dari peubah acak X dirumuskan sebagai :

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Contoh : Peubah acak X memiliki fkp $f(x) = \begin{cases} x/8 & x = 1,2,5 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$

Var (X) = ?

Ragam adalah momen kedua terhadap nilaitengah

$$\mu_2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

Teorema 2.4.3. Jika X adalah peubah acak, maka :

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Catatan : $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

Teorema 2.4.4. Jika X adalah peubah acak, a dan b adalah konstanta, maka :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Definisi 2.4.2.
Momen ke-k terhadap titik asal dari suatu peubah acak X adalah:

$$\mu_k^{`} = E(X^k)$$

dan momen ke-k terhadap nilai tengah adalah:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = E(X - \mu)^k$$

Catatan :

- *E(X^k)* adalah momen ke-k dari X atau momen pertama dari X^k.
- k = 1 → $\mu_1^{'} = E(X)$
  (Momen pertama adalah nilaitengah (*mean*) (notasi μ bukan μ_k')
  $$\mu_1 = E\{X - E(X)] = E(X) - E(X) = 0$$
  (Momen pertama terhadap nilaitengah adalah nol)
- k = 2 → Momen kedua terhadap nilaitengah adalah ragam,

$$\mu_w = E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2$$

Fungsi Pembangkit Momen

Definisi

Jika X adalah peubah acak, maka nilai harapan

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

dinamakan fungsi pembangkit momen (FPM) dari X jika nilai harapan ini ada untuk setiap nilai t dalam selang –h < t < h untuk suatu h > 0.

Contoh :

Tentukan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X yang memiliki fkp $f(x) = e^{-x}$ untuk x>0 dan nol selainnya

Teorema

Jika FPM dari X ada, maka :

$$E(X^r) = M_X^{(r)}(0) \qquad \text{untuk semua } r = 1,2,\ldots$$

dan

$$M_X(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E(X^r)t^r}{r!}$$

Contoh

Suatu peubah acak diskret memiliki fmp $f(x) = (1/2)^{x+1}$ untuk x = 0, 1, 2, ..., dan nol selainnya. Tentukan fungsi pembangkit momennya serta nilai harapannya.

Sifat FPM

Teorema

Jika $Y = aX + b$, maka $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

Definisi

Faktorial momen ke-r dari X dinyatakan sebagai :

$$E[X(X-1)\ldots(X-r-1)]$$

dan pembangkit momen faktorial (FPMF) dari X adalah :

$$G_X(t) = E(t^X)$$

jika nilai harapan ini ada untuk semua t pada suatu selang dalam bentuk 1-h<t<1+h

Teorema

Jika X memiliki FMPF, $G_X(t)$, maka .

$$G_X'(t) = E(X)$$

$$G_X''(t) = E[X(X-1)]$$

$$G_X^r(t) = E[X(X-1)\ldots(X-r+1)]$$

LOGO

Selamat Belajar!

STATISTIKA MATEMATIKA I I

Peubah Diskret Khusus

Hazmira Yozza – Izzati Rahmi HG
Jur. Matematika FMIPA Unand

KOMPETENSI

a. Mengidentifikasikan peubah-peubah acak diskret khusus : Seragam diskret, bernoulli, binomial, hipergeometrik, Poisson, Binomial Negatif dan geometrik
b. Menjabarkan karakteristik (fungsi kepekatan peluang, nilai harapan, ragam, fungsi pembangkit momen) bagi peubah-peubah acak diskret khusus
c. Menghitung nilai peluang bagi peubah acak diskret khusus.

Definisi 3.1

Suatu peubah acak diskret X dikatakan memiliki sebaran seragam diskret pada bilangan-bilangan 1, 2, 3,..., N jika memiliki fkp berbentuk :

$$f(x \mid N) = \frac{1}{N} \qquad x = 1,2,\ldots,N$$

Notasi $X \sim DU(N)$

Contoh 3.1.

Sebuah permainan dilakukan dengan menggulingkan dadu bersisi enam yang setimbang. Tentukan peluang munculnya :

a. mata 1
b. mata ganjil

SEBARAN SERAGAM DISKRET

Fungsi Sebaran Kumulatif

$$F(x) = \sum_{t=1}^{x} f(t) = \sum_{t=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N}$$

Teorema 3.1.
Bila peubah acak X memiliki sebaran seragam diskret dengan parameter N, dituliskan X ~ DU(N), maka :

$$E(X) = \frac{N+1}{2} \qquad Var(X) = (N^2 - 1)/12$$

$$M_X(t) = \frac{1}{N} \frac{e^{Nt} - 1}{1 - e^{-t}} \qquad G_X(t) = \frac{1}{N} \frac{(t^N - 1)}{(1 - t^{-1})}$$

Sebaran Bernoulli

Percobaan Bernoulli

- **Memiliki dua kemungkinan hasil : Berhasil / Gagal**
- **P(Berhasil) = *p* ; P(Gagal) = 1-*p* = *q***
- **PA Bernoulli didefinisikan sebagai :**

$$X(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e \in E \\ 0 & \text{jika } e \in E' \end{cases}$$

Sebaran Bernoulli

Definisi 3.2.

Suatu peubah acak diskret X dikatakan memiliki sebaran bernoulli jika memiliki fmp berbentuk :

$$f(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

Teorema 3.2.

Bila peubah acak X memiliki sebaran bernoulli dengan parameter p, maka :

$$E(X) = p \qquad Var(X) = p(1-p)$$

$$M_X(t) = 1 + p(e^t - 1) \qquad G_X(t) = 1 + p(t-1)$$

SEBARAN BINOMIAL

LOGO

Percobaan Binomial

- N percobaan bernoulli
- Saling bebas
- Peubah acak binomial X menyatakan banyaknya keberhasilan dalam n ulangan bernoulli yang saling bebas

PERCOBAAN : Pelemparan 1 koin 5 kali (P(Gambar)=p)

x	Titik contoh	*Peluang*	Total peluang
0	$A_1A_2A_3A_4A_5$	$q.q.q.q.q$	$q^5 = \binom{5}{0} p^0 q^{5-0}$
1	$G_1A_2A_3A_4A_5$ $A_1G_2A_3A_4A_5$ $A_1A_2G_3A_4A_5$ $A_1A_2A_3G_4A_5$ $A_1A_2A_3A_4G_5$	$p.q.q.q.q$ $q.p.q.q.q$ $q.q.p.q.q$ $q.q.q.p.q$ $q.q.q.q.p$	$5pq^4 = \binom{5}{1} p^1 q^{5-1}$
2	$G_1G_2A_3A_4A_5$ $G_1A_2G_3A_4A_5$ $G_1A_2A_3G_4A_5$ $G_1A_2A_3A_4G_5$ $A_1G_2G_3A_4A_5$ $A_1G_2A_3G_4A_5$ $A_1G_2A_3A_4G_5$ $A_1A_2G_3G_4A_5$ $A_1A_2G_3A_4G_5$ $A_1A_2A_3G_4G_5$	$p.p.q.q.q$ $p.q.p.q.q$ $p.q.q.p.q$ $p.q.q.q.p$ $q.p.p.q.q$ $q.p.q.p.q$ $q.p.q.q.p$ $q.q.p.p.q$ $q.q.p.q.p$ $q.q.q.p.p$	$10p^2q^3 = \binom{5}{2} p^2 q^{5-2}$

PERCOBAAN : Pelemparan 1 koin setimbang 5 kali

x	Titik contoh	*Peluang*	Total peluang
3	$G_1G_2G_3A_4A_5$ $G_1G_2A_3G_4A_5$ $G_1G_2A_3A_4G_5$ $G_1A_2G_3G_4A_5$ $G_1A_2G_3A_4G_5$ $G_1A_2A_3G_4G_5$ $A_1G_2G_3G_4A_5$ $A_1G_2G_3A_4G_5$ $A_1G_2A_3G_4G_5$ $A_1A_2G_3G_4G_5$	$p.p.p.q.q$ $p.p.q.p.q$ $p.p.q.q.p$ $p.q.p.p.q$ $p.q.p.q.p$ $p.q.q.p.p$ $q.p.p.p.q$ $q.p.p.q.p$ $q.p.q.p.p$ $q.q.p.p.p$	$10p^3q^2 = \binom{5}{3}p^3q^{5-3}$
4	$G_1G_2G_3G_4A_5$ $G_1G_2G_3A_4G_5$ $G_1G_2A_3G_4G_5$ $G_1A_2G_3G_4G_5$ $A_1G_2G_3G_4G_5$	$p.p.p.p.q$ $p.p.p.q.p$ $p.p.q.p.p$ $p.q.p.p.p$ $q.p.p.p.p$	$5p^4q = \binom{5}{4}p^4q^{5-4}$
5	$G_1G_2G_3G_4G_5$	$p.p.p.p.p$	$p^5 = \binom{5}{5}p^5q^{5-0}$

SEBARAN BINOMIAL

SECARA UMUM :

$$P(X = x) = \binom{5}{x} p^x q^{5-x}$$

Definisi 3.4.
Dari suatu sekuens n ulangan bernoulli yang saling bebas dengan peluang keberhasilan *p* untuk setiap ulangan, misalkan *X* menyatakan banyaknya keberhasilan. Fungsi peluang diskret bagi *X* diberikan oleh :

$$P(X = x) = f_X(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dimana $q = 1 - p$

NOTASI : X ~ BIN(n,p).

CONTOH

Sebuah tes terdiri dari 20 soal pilihan berganda dengan 4 pilihan jawaban, dan hanya satu pilihan jawaban yang benar. Seorang peserta ujian, menjawab 20 soal tersebut secara acak. Tentukan peluang :

a. Semua soal dapat dijawabnya secara benar.
b. Ia dapat menjawab lebih dari 90% soal dg benar
c. Jika peserta ujian tersebut mengerjakan sangat banyak set soal yang semacam itu, berapa rata-rata nilai yang akan ia peroleh? Catatan : 1 soal yang dijawab benar diberi nilai 5

CONTOH

Sebuah permainan berupa pelemparan tiga buah dadu bermata enam setimbang. Seorang pemain bertaruh Rp. 100,- untuk setiap permainan. Setiap kali munculnya mata 6 pada suatu dadu, uang taruhannya akan dikembalikan dan ia mendapatkan Rp. 100,- untuk setiap mata 6 yang muncul tersebut. Berapa peluang ia akan menang sebesar Rp. 300,-. dalam satu kali permainan. Tentukan pula rata-rata kemenangan yang ia dapat jika ia memainkan permainan tersebut banyak kali.

SEBARAN BINOMIAL

Teorema 3.3.
Bila peubah acak X memiliki sebaran binomial dengan banyaknya ulangan *n* dan peluang keberhasilan *p* atau ditulis X~BIN(n,p), maka :

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p) = npq$$

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n = (pe^t + q)^n$$

$$G_X(t) = (pt + q)^n$$

Sebaran Hipergeometrik

Percobaan :

Pengambilan 4 kelereng tanpa pengembalian dari kotak yang berisi 10 kelereng (6 merah, 4 biru). Percobaan binomial???

Pengambilan-1 P(M) = 0.6; P(B) = 0.4

Pengambilan-2 P(M) dan P(B) tergantung hasil pengambilan sebelumnya

Pengambilan-1 terambil merah

P(M) = 5/9; P(B) = 4/9

Pengambilan-1 terambil biru

P(M) = 6/9; P(B) = 3/9

Jadi perc. ini bukan perc binomial

Sebaran Hipergeometrik

- **Populasi berukuran N, yang terdiri dari M anggota yang dapat dianggap sebagai ”keberhasilan” dan N-M anggota yang dapat dianggap sebagai ”kegagalan”.**

- **Dari populasi tersebut diambil n contoh acak satu persatu tanpa pengembalian. Cara pengambilan seperti ini sama dengan pengambilan secara sekaligus.**

- **Jika dinyatakan X sebagai banyaknya keberhasilan dalam n ulangan, maka peubah acak tersebut dinamakan peubah acak hipergeometrik.**

Sebaran Hipergeometrik

Definisi 3.5.

Suatu peubah acak X dinamakan sebagai peubah acak hipergeometrik jika memiliki fungsi kepakatan peluang :

$$P(X=x)=f_X(x)=h(x;n,M,N)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dengan

$$\max(0, n-N+M) \le x \le \min(n, M)$$

NOTASI : $X \sim$ HYP(n,M,N)

Suatu kotak berisi 100 keping mikro, 80 baik dan 20 lainnya rusak. Banyaknya keping mikro yang rusak tidak diketahui oleh pembeli dan ia memutuskan untuk memilih 10 keping mikro secara acak satu persatu tanpa pengembalian dan akan menerima kotak tersebut jika kesepuluh keping mikro yang terpilih mengandung tak lebih dari tiga keping mikro yang rusak. Berapa peluang ia akan menerima kotak tersebut.

Sepuluh benih dipilih dari sebuah keranjang yang berisi 1000 benih bunga, terdiri dari 400 benih bunga berwarna merah dan sisanya berwarna lain. Seberapa mungkin untuk mendapatkan tepat lima benih bunga berwarna?

Sebaran Hipergeometrik

Teorema 3.4.
Bila peubah acak X memiliki sebaran hipergeometrik, maka :

$$E(X) = \frac{nM}{N} \qquad Var(X) = \frac{nM}{N}\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}$$

Teorema 3.5.
Jika X~HYP(n,M,N), maka untuk setiap nilai x = 0, 1, …, n dan jika N→∞ dan M→∞ dengan M/N→p, suatu konstanta positif

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Artinya, jika N → ~ (dlm bbrp buku n<<<N), maka seb hipergeometrik dapat didekati dg seb binomial (n,p) dg p=M/N

Sebaran Hipergeometrik

Teorema 3.5.

Jika X~HYP(n,M,N), maka untuk setiap nilai x = 0, 1, …, n dan jika N→∞ dan M→∞ dengan M/N→p, suatu konstanta positif'

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Sepuluh benih dipilih dari sebuah keranjang yang berisi 1000 benih bunga, terdiri dari 400 benih bunga berwarna merah dan sisanya berwarna lain. Seberapa mungkin untuk mendapatkan tepat lima benih bunga berwarna?

Percobaan :

Pelemparan 1 buah koin berulangkali

- terdiri dari ulangan-ulangan yang saling bebas
- terdapat dua kemungkinan hasil (Berhasil dan Gagal)
- P(Berhasil) = p; P(Gagal) = 1-p = q

Sebaran Geometrik dan Binomial Negatif

Percobaan :

Pelemparan 1 buah koin berulangkali

- Banyaknya ulangan ditentukan (n tetap) dan didefinisikan X = banyaknya keberhasilan yang terjadi dalam n ulangan; X ~ BIN(n,p)

- Percobaan dilakukan berulangkali, sampai didapatkan r buah keberhasilan (r ditetapkan); D didefinisikan sebagai banyaknya ulangan yang dilakukan sampai diperoleh r keberhasilan; X ~ BINOMIAL NEGATIF(r,p)

- r = 1 (X = banyaknya ulangan sampai diperoleh keberhasilan pertama); X ~ GEOMETRIK(p)

Percobaan :

Beberapa orang ditelpon dan ditanya apakah si penerima sedang menderita batuk atau tidak.

- Percobaan dilakukan berulang kali sampai ditemukan 5 orang yang menderita batuk

  X = banyaknya orang yang harus ditelepon

  X ~ Binomial Negatif.

- Percobaan dilakukan sampai didapati orang pertama yang sedang menderita batuk

  X = banyaknya orang yang ditelepon

  X ~ Geometrik.

SEBARAN GEOMETRIK

LOGO

Definisi 3.6.
Suatu sekuens percobaan bernoulli dilakukan berulang kali sehingga diperoleh keberhasilan yang pertama. Peubah acak Geometrik didefinisikan sebagai banyaknya ulangan bernoulli yang harus dilakukan sampai diperoleh keberhasilan pertama.

Titik contoh	X = x	P(X = x)
B	X = 1	$p \qquad = p$
GB	X = 2	$q\,p \qquad = pq$
GGB	X = 3	$q\,q\,p \qquad = pq^2$
GGGB	X = 4	$q\,q\,q\,p \qquad = pq^3$
:	:	:
GG...GB	X = x	$q\,q \ldots q\,p = pq^{(x-1)}$
:	:	

Definisi 3.7.
Jika kita nyatakan X sebagai banyaknya ulangan yang diperlukan untuk mendapatkan keberhasilan pertama, maka fkp peubah acak geometrik X diberikan oleh :

$$g(x;p) = pq^{x-1}$$
$$x = 1, 2, 3, \ldots$$

NOTASI $X \sim GEO(p)$

CONTOH :

Peluang seorang pemain basket dapat memasukkan bola ke keranjang adalah 0.3. Tentukan peluang bahwa ia memerlukan lima lemparan sebelum ia dapat memasukkan bola pertama ke keranjang bila diketahui bahwa peluang ia dapat memasukkan pada suatu kali lemparan adalah 0.7. Tentukan peluang ia dapat memasukkan 6 bola pada lemparan yang ke 8

Peluang keberhasilan peluncuran sebuah misil adalah 0.6. Tentukan peluang

a. Diperlukan tepat enam peluncuran hingga satu misil berhasil diluncurkan

b. Diperlukan kurang dari enam peluncuran hingga empat misil berhasil diluncurkan

Peluang seorang pemain basket dapat memasukkan bola ke keranjang adalah 0.3.

a. Tentukan peluang bahwa ia memerlukan lima lemparan sampai ia dapat memasukkan bola pertama ke keranjang

b. Tentukan peluang bola ke 8 yang ia lemparkan adalah yang ke 6 yang berhasil ia masukkan.

c. Tentukan rata-rata banyaknya lemparan yang harus dilakukan hingga 1 bola masuk ke keranjang

Teorema 3.6. Sifat No-Memory

Jika $X \sim GEO(p)$, maka :

$$P[X > j + k \mid X > j] = P[X > k]$$

Teorema 3.7.

Bila peubah acak X memiliki sebaran geometrik dengan peluang keberhasilan *p*, maka :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$M_X(t) = \frac{p}{q}\frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t} \qquad \text{syarat } qe^t < 1$$

$$G_X(t) = \frac{p}{q}\frac{qt}{1-qt} = \frac{pt}{1-qt} \qquad \text{syarat } qt < 1$$

Definisi 3.8.

Suatu sekuens percobaan bernoulli dilakukan berulang kali sehingga diperoleh keberhasilan yang ke-r. Peubah acak Binomial Negatif didefinisikan sebagai banyaknya ulangan bernoulli yang harus dilakukan sampai diperoleh r keberhasilan.

X = banyaknya ulangan sampai diperoleh keberhasilan ke-3

X	Hasil percobaan	Peluang	P(X = x)
3	BBB	$ppp = p^3 = p^3q^0$	$P^3\,q^0$
4	GBBB BGBB BBGB	$qppp = p^3q$ $pqpp = p^3q$ $ppqp = p^3q$	$3p^3q$
5	GGBBB GBGBB GBBGB BGGBB BGBGB BBGGB	$qqppp = p^3q^2$ $qpqpp = p^3q^2$ $qppqp = p^3q^2$ $pqqpp = p^3q^2$ $pqpqp = p^3q^2$ $ppqqp = p^3q^2$	$6p^3\,q^2$
:			:
x			$\binom{x-1}{3-1} p^3 q^{x-3}$

LOGO

Definisi 3.9.

Jika kita nyatakan X sebagai banyaknya ulangan yang diperlukan untuk mendapatkan r keberhasilan, maka fkp peubah acak binomial negatif X diberikan oleh :

$$f(x;r,p)=\binom{x-1}{r-1}p^{r}q^{x-r} \qquad x=r,r+1,\ldots$$

NOTASI : X ~ NB(r,p)

Tim A bermain dengan tim B dalam suatu kejuaraan yang terdiri dari 7 set pertandingan. Kejuaraan tersebut akan berakhir jika salah satu tim telah memenangkan empat pertandingan. Untuk masing-masing pertandingan, P(A menang) = 0.6 dan masing-masing pertandingan tersebut diasumsikan saling bebas. Berapa peluang bahwa pertandingan tersebut akan berakhir tepat dalam enam pertandingan.

Teorema 3.8.

Bila peubah acak X memiliki sebaran binomial negatif dengan banyak keberhasilan r dan peluang keberhasilan *p*, maka :

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r \qquad \text{syarat } qe^t < 1$$

$$G_X(t) = \left[\frac{pt}{1-qt}\right]^r \qquad \text{syarat } qt < 0$$

SEBARAN POISSON

Definisi 3.
Suatu peubah acak X dikatakan memiliki Sebaran Poisson dengan parameter μ jika ia memiliki fkp dalam bentuk :

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

Dengan μ adalah rata-rata keberhasilan dalam selang waktu dan luasan tersebut

NOTASI : X ~ POI(μ)

Teorema 3.9.

Bila peubah acak X ~ POI(μ) , maka :

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \mu$$

$$M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)} \qquad G_X(t) = e^{\mu(t-1)}$$

Teorema 3.9.

Bila peubah acak X ~ POI(μ) , maka :

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \mu$$

$$M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)} \qquad G_X(t) = e^{\mu(t-1)}$$

Rata-rata banyaknya panggilan yang datang pada suatu switchboard dalam waktu satu jam adalah 10 panggilan. Tentukan peluang dalam waktu satu jam akan datang :

a. tepat tujuh panggilan
b. Paling banyak dua panggilan
c. Antara tiga dan tujuh (inklusif) panggilan. Catat : inklusif artinya 3 dan 7 masuk ke dalam selang tersebut
d. Lebih dari dua panggilan

Teorema 3.10.
Jika X~BIN(n,p), maka untuk setiap nilai x = 0, 1, 2, ... dan jika $p \to 0$ dengan np = μ yang konstan, maka :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

- Artinya jika n→~ (ulangan banyak) dan p→ 0 (peluang keberhasilan sangat kecil , maka sebaran binomial dapat didekati dengan sebaran Poisson dengan parameter μ=np
- Berlaku juga jika p→ 1 (dlm kondisi ini pertukarkan definisi berhasil dan gagal

Misalkan 1% dari semua transistor yang diproduksi oleh sebuah perusahaan adalah cacat. Sebuah komputer model baru memerlukan 100 buah transistor ini, dan 100 transistor tersebut dipilih secara acak. Tentukan peluang memperoleh 3 transistor yang rusak.


Enter

Statistika Matematika I

Sebaran Kontinu Khusus

Hazmira Yozza – Izzati rahmi HG
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

SEBARAN SERAGAM KONTINU

Definisi 4.1.
Suatu peubah acak kontinu X dikatakan memiliki seragam kontinu pada selang (a,b) jika memiliki fkp dalam bentuk

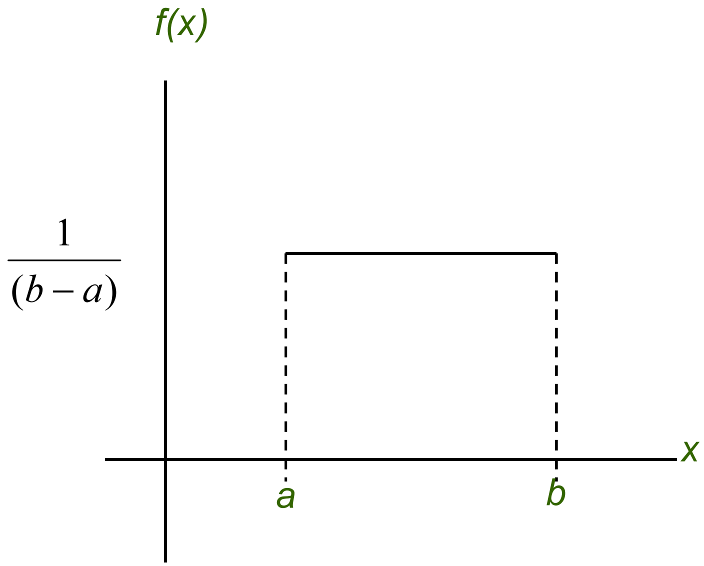
$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$

dan nol untuk x lainnya.

NOTASI : $X \sim \text{UNIF}(a,b)$

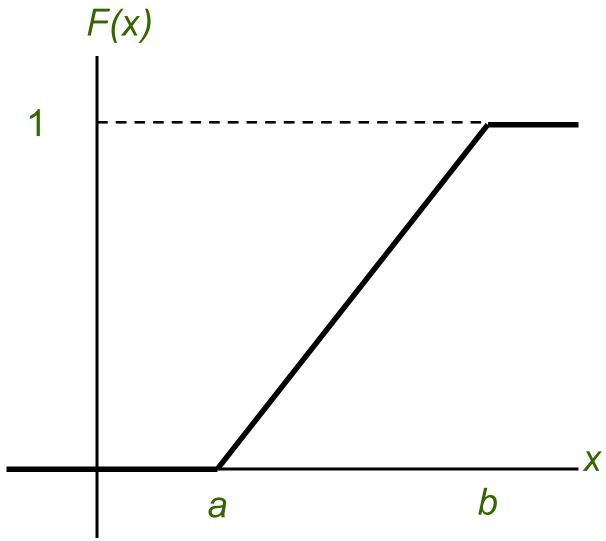
Sebaran Seragam Kontinu

FUNGSI KEPEKATAN PELUANG



$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$

FUNGSI SEBARAN



$$F(x;a,b) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Sebaran Seragam Kontinu

Teorema 4.1.
Jika X menyebar seragam kontinu pada selang (a,b), maka :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} \qquad G_X(t)\frac{t^b - t^a}{(b-a)\ln t}$$

Pembacaan temperatur (dalam derajat Fahrenheit) pada suatu waktu yang dipilih secara acak dan pada suatu lokasi adalah merupakan peubah acak UNIF(50,90) dan pembacaan suhu pada lokasi kedua adalah pa UNIF(30,110). Tentukan peluang pada suatu waktu, suhu di kedua lokasi berada di dalam selang (60,80). Tentukan juga nilai harapan dan ragam suhu di kedua lokasi.

Sebaran Gamma

Definisi 4.2

Fungsi Gamma dilambangkan dengan $\Gamma(\kappa)$ dengan κ>0, diberikan oleh :

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty t^{\kappa-1} e^{-t}\, dt$$

Teorema 4.2.

Fungsi Gamma memenuhi sifat-sifat berikut :

$$\Gamma(\kappa) = (\kappa-1)\Gamma(\kappa-1) \qquad \kappa > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n = 1,2,\ldots.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Sebaran Gamma

Definisi 4.3.
Suatu peubah acak kontinu X dikatakan memiliki sebaran gamma dengan parameter κ > 0 dan θ > 0 jika memiliki fkp dalam bentuk :

$$f(x;\theta,\kappa)=\frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)}x^{\kappa-1}e^{-x/\theta} \qquad x>0$$

dan nol untuk x lainnya.

NOTASI : X ~ GAM (θ ,κ)

Sebaran Gamma

Parameter κ dinamakan parameter bentuk karena parameter tersebut menentukan bentuk dasar dari grafik fkp. Secara khusus, terdapat tiga bentuk dasar ;

-$\kappa < 1$: Kurva cekung, asimtotik pada sumbu - y

-$\kappa = 1$; Kurva cekung, memotong di titik $(0,1/\theta)$

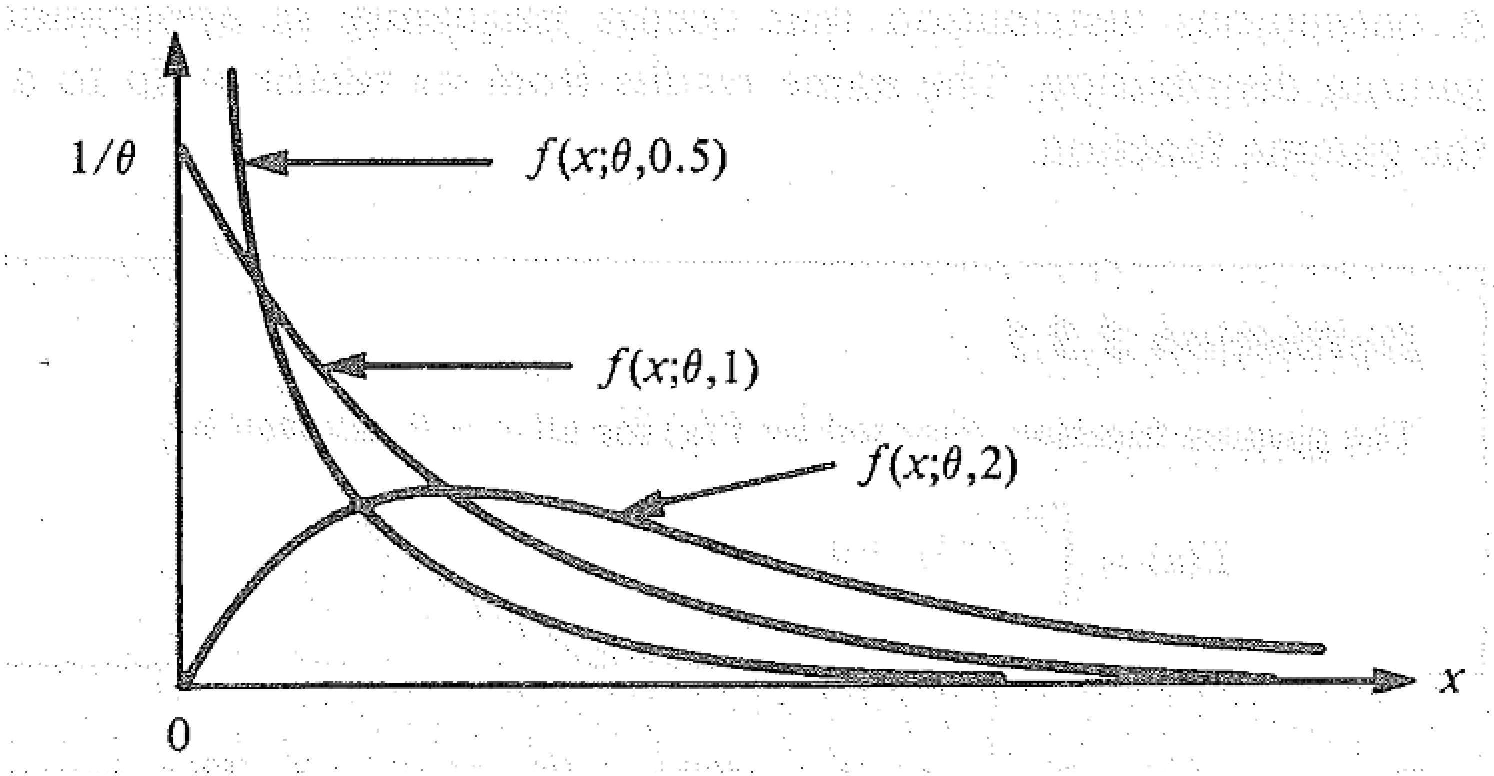
-$\kappa > 1$. : Kurva cembung , memotong titik $(0,0)$

Parameter θ disebut parameter skala

$F(x;\ \theta,\kappa) = F(x/\theta;1,\kappa)$ (dengan mensubstitusi $u = x/\theta$

Cth: Misalkan $X \sim GAM\ (12,\ \kappa)$, maka:

$$P(X \leq 24) = F(24;\ 12,\kappa) = F(2;\ 1,\kappa)$$



$1/\theta$
$f(x;\theta,0.5)$
$f(x;\theta,1)$
$f(x;\theta,2)$
x
0

Sebaran Gamma

Waktu (dalam menit) sampai pelanggan pertama masuk ke sebuah toko dalam suatu hari diasumsikan menyebar menurut sebaran gamma dengan $\theta=1$ dan $\kappa=3$. Bila toko tersebut buka jam 8.00 WIB, tentukan peluang :

a. Konsumen pertama datang antara 8:05 dan 8:10
b. Konsumen pertama datang setelah 8:10 menit

Sebaran Gamma

Fungsi sebaran kumulatif dari sebaran Gamma adalah :

$$F(x;\theta,\kappa) = \int_0^x \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-x/\theta} dx$$

Sebaran Gamma

Teorema:

Jika X ~ GAM (θ, n), dimana n adalah bilangan bulat positif, maka CDF dapat ditulis :

$$F(x;\theta,n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x/\theta)^i}{i!} e^{-x/\theta}$$

Nb. Bentuk di atas analog dengan bentuk sebaran kumulatif Poisson dengan $\mu = x/\theta$

Sebaran Gamma

Teorema 4.1.

Jika X menyebar menurut sebaran Gamma (θ,κ) , maka :

$$E(X) = \kappa\theta \qquad Var(X) = \kappa\theta^2$$

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{(1-t\theta)}\right)^{\kappa} \qquad G_X(t) = \left(\frac{1}{(1-\theta\ln t)}\right)^{\kappa}$$

Sebaran Eksponensial

Definisi 4.4.
Suatu peubah acak kontinu X dikatakan memiliki sebaran eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ jika memiliki fkp dalam bentuk

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

dan nol untuk x lainnya.

Fungsi sebaran kumulatif dari peubah acak eksponensial adalah :

$$F(x;\theta) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = -e^{-t/\theta}\Big|_0^x = 1 - e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

Notasi : X~GAM(θ,1) atau X~EXP(θ).

Sebaran Eksponensial

Sebuah komponen diketahui memiliki masa hidup (dalam jam) yang menyebar menurut sebaran eksponensial dengan parameter $\theta = 100$. Tentukan peluang bahwa masa hidup komponen tersebut lebih dari 50 jam.

Sebaran Eksponensial

Teorema 4.4.
Peubah acak kontinu X menyebar EXP(θ) jika dan hanya jika :

$$P(X > a + t \mid X > a) = P(X > t)$$

untuk setiap $a > 0$ dan $t > 0$

Sebaran Eksponensial

Teorema 4.1.

Jika X menyebar menurut sebaran Eksponensial (θ) , maka :

$$E(X) = \theta \qquad Var(X) = \theta^2$$

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{(1 - t\theta)} \right) \qquad G_X(t) = \left(\frac{1}{(1 - \theta \ln t)} \right)$$

Sebaran Normal

Definisi 4.5.

Suatu peubah acak kontinu X dikatakan memiliki sebaran normal dengan parameter $-\infty<\mu<\infty$ dan $\sigma^2>0$ jika memiliki fkp dalam bentuk

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

dan nol untuk x lainnya.

NOTASI : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Sebaran Normal Baku

Definisi 4.5.

Suatu peubah acak kontinu Z dikatakan memiliki sebaran normal baku jika memiliki fkp dalam bentuk

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

dan nol untuk x lainnya.

NOTASI : Z~N(0, 1).

Sebaran Normal

Teorema 4.6.
Bila Z adalah peubah normal baku, maka :

$$E(Z) = 0 \qquad Var(Z) = 1 \qquad M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

Teorema 4.7.
Bila , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka :

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2 \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

Sebaran Normal

Teorema 4.8.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka :

1. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Sebaran Normal

Teorema 4.9.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka :

1. $E(X-\mu)^{2r} = \dfrac{(2r)!\sigma^{2r}}{r!2^r} \qquad r = 1,2,\ldots$

2. $E(X-\mu)^{2r-1} = 0 \qquad r = 1,2,\ldots$

Selamat Belajar!

LOGO

SEBARAN BERSAMA

Fungsi Kepekatan Peluang Diskret

Definisi

Fungsi kepekatan peluang bersama dari peubah acak diskret k-dimensi **X**=(X_1, X_2, …., X_k) didefinsikan sebagai

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P\left[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\right]$$

Untuk semua kemungkinan nilai **x**=(x_1,x_2, …., x_k) dari **X**

Sebaran Multinomial

Percobaan Binomial

- n percobaan bernoulli yang saling bebas
- Pada setiap ulangan, terdapat dua kemungkinan hasil (Berhasil/Gagal);
- P(Berhasil) = p, P(Gagal) = 1-p=q
- PA X : banyaknya keberhasilan dalam n ulangan
- X~BIN(n,p) dengan fkp :

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Sebaran Multinomial

- Perluasan dari Seb. Binomial
- n percobaan yang saling bebas
- Pada setiap ulangan, terdapat $k+1$kemungkinan hasil : $E_{1,}$ E_2,… E_k, E_{k+1}
- $P(E_1) = p_1$, $P(E_2) = p_2$, …., $P(E_k) = p_k$, $P(E_{k+1})=1- p_1 - p_2 -\ldots- p_k$
- PA X_1 : banyaknya kejadian E_1 dalam n ulangan

  X_2 : banyaknya kejadian E_2 dalam n ulangan

  :

  X_k : banyaknya kejadian E_k dalam n ulangan
- $X_1, X_2,\ldots X_k \sim MULT(n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$

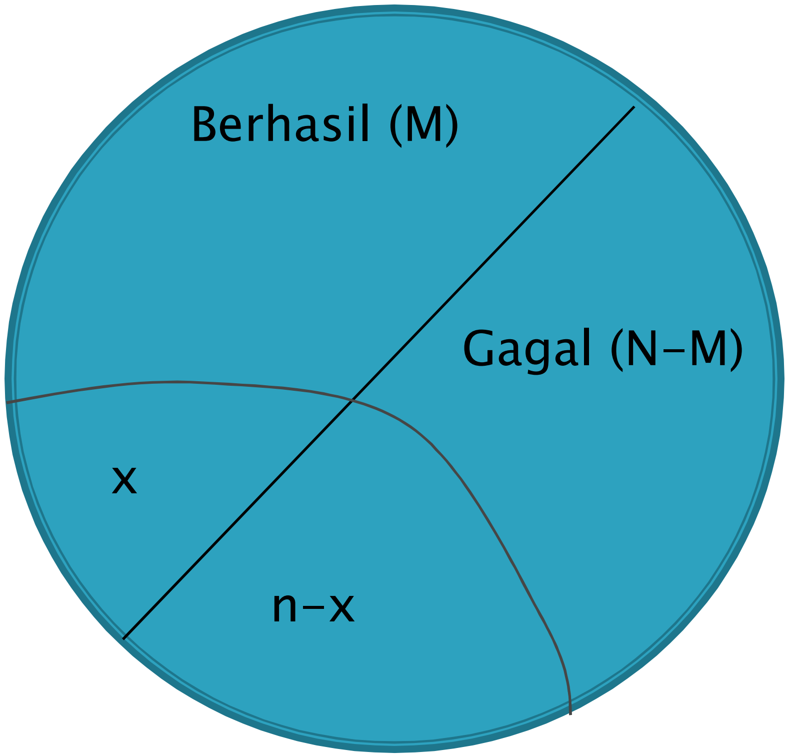
Sebaran Multinomial

Fungsi Kepekatan Peluang

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k! (n - x_1 - \ldots - x_k)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} (1 - p_1 - \ldots - p_k)^{n - x_1 - \ldots - x_k}$$

$$x_1, \ldots, x_k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Sebaran Hipergoemetrik yang Diperluas

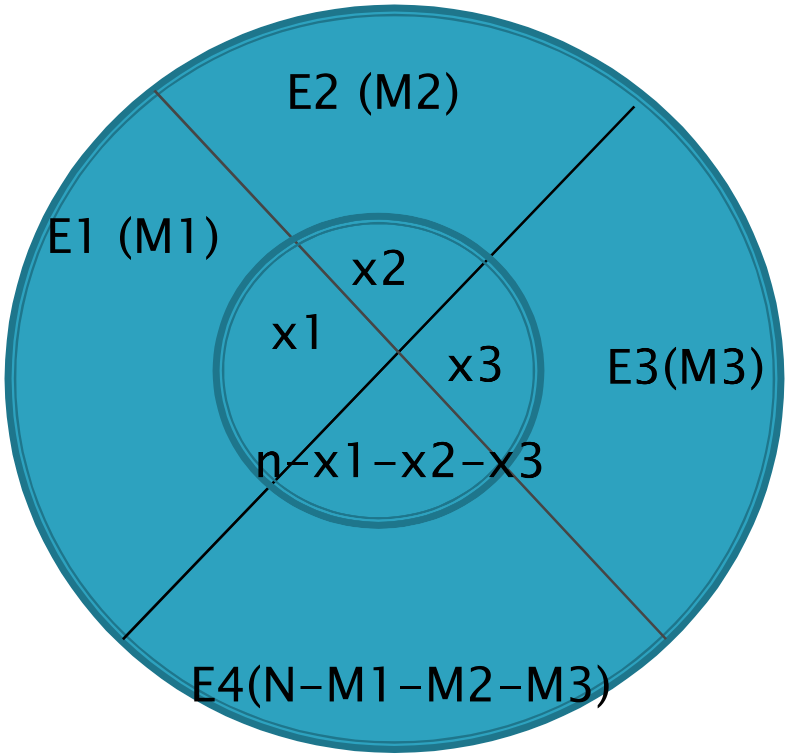


PA X : banyaknya keberhasilan dalam contoh berukuran n

- X~HYP(n,M,N)
- Fkp :

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Sebaran Hipergeometrik yang Diperluas



PA X_1 : banyaknya E_1 dlm contoh

X_2 : banyaknya E_2 dlm contoh

X_3 : banyaknya E_3 dlm contoh

$X_1, X_2, X_3 \sim HYP(n, M_1, M_2, M_3, N)$

Fkp :

$$f_X(x) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\binom{M_2}{x_2}\binom{M_3}{x_3}\binom{N-M_1-M_2-M_3}{n-x_1-x_2-x_3}}{\binom{N}{n}}$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0,1,\ldots,n$$

Suatu keranjang berisi 1000 bibit bunga. 400 bibit diantaranya berwarna merah, 400 berwarna putih dan yang lainnya berwarna pink. Suatu contoh acak 10 bibit bunga diambil tanpa pengembalian dari keranjang tersebut. Tentukan peluang terambilnya bibit bunga merah, putih dan pink berturut-turut sebanyak 3, 5 dan 2.

Sebuah dadu bersisi empat dilambungkan sebanyak 20 kali, dan dicatat sisi yang muncul. Tentukan peluang munculnya mata 1,2,3 dan 4 berturut-turut sebanyak 5, 6, 3, 6 kali, bila peluang munculnya masing-masing mata berturut-turut 0.25, 0.3, 0.2, dan 0.25.

Teorema

Fungsi f(x1,x2,…,xk) adalah fkp bersama bagi suatu vektor peubah acak diskret **X**=(X_1, X_2, …., X_k) jika dan hanya jika memenuhi :

1. $$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq 0$$

2. $$\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$$

Contoh : Tabel fkp dari pa. X1, X2~MULT(3,0.4,0.4)

			x2		
		0	1	2	3
	0	0.008	0.048	0.096	0.064
x1	1	0.048	0.192	0.192	0.000
	2	0.096	0.192	0.000	0.000
	3	0.064	0.000	0.000	0.000

Dari tabel diketahui :

P(X1=0, X2=1) = 0.048 P(X1=1, X2=3) = 0.000

Fungsi tsb adalah fkp bersama karena :

- $f(x1,x2) \geq 0$ untuk semua (x1,x2)
- $\sum_{x_1}\sum_{x_2} f(x_1, x_2) = 1$

			x2		
		0	1	2	3
	0	0.008	0.048	0.096	0.064
x1	1	0.048	0.192	0.192	0.000
	2	0.096	0.192	0.000	0.000
	3	0.064	0.000	0.000	0.000

$P(X1=0) =$

$P(X2=2) =$

$P(X1<X2) =$

			x2			
		0	1	2	3	
	0	0.008	0.048	0.096	0.064	0.216
x1	1	0.048	0.192	0.192	0.000	0.432
	2	0.096	0.192	0.000	0.000	0.288
	3	0.064	0.000	0.000	0.000	0.064
		0.216	0.432	0.288	0.064	1.000

P(X1=0)

P(X1=1)

P(X1=2)

P(X1=3)

P(X2=0)

P(X2=1)

P(X2=2)

P(X2=3)

Fkp marjinal bagi X2

Fkp marjinal bagi X1

Definisi

Jika pasangan (X_1, X_2) adalah peubah acak diskret dengan fkp bersama $f(x_1,x_2)$, maka fkp marjinal bagi X_1 dan X_2 adalah :

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

dan

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2)$$

Contoh :

X1,X2 adalah peubah acak diskret dengan fkp bersama

$$f(x_1, x_2) = c(x_1 + x_2) \qquad x_1 = 0,1,2 \quad x_2 = 0,1,2$$

a. Tentukan c
b. Tentukan P(X1>1)
c. Tentukan P(X1>1,X2≤1)
d. Tentukan fkp marjinal bagi X1 dan X2

Definisi

CDF Bersama. CDF bersama (fungsi sebaran bersama dari k peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_k$ didefinisikan oleh :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k]$$

Teorema

Suatu fungsi $F(x_1, x_2)$ adalah CDF bivariate jika dan hanya jika :

$$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0 \qquad untuk \quad semua \quad x_2$$

$$\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0 \qquad untuk \quad semua \quad x_1$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} F(x_1, x_2) = 1$$

$$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0$$
$$untuk \quad semua \quad a < b \ \ dan \quad c < d$$

$$\lim_{h \to 0} F(x_1 + h, x_2) = \lim_{h \to 0} F(x_1, x_2 + h) = F(x_1, x_2)$$
$$untuk \quad semua \quad x_1 \ \ dan \quad x_2$$

SEBARAN BERSAMA KONTINU

Definisi

Vektor peubah acak berdimensi-k **X**=(X_1, X_2 , …,X_k) dikatakan kontinu jika terdapat suatu fungsi f(x_1,x_2,…, x_2) yang dinamakan fkp bersama dari **X** sedemikian sehingga CDF bersamanya dapat dituliskan sebagai :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k$$

untuk semua

x=(x_1, x_2 , …,x_k)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Teorema

Sembarang fungsi $f(x_1,x_2,\ldots, x_k)$ adalah fkp bersama peubah acak berdimensi-k jika dan hanya jika

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_k) \geq 0$$ untuk semua $x_1,x_2,\ldots, x_k$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2,\ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = 1$$

CONTOH : Tentukan c bila fkp dari peubah acak X1,X2 adalah

$$f(x_1, x_2) = cx_1x_2 \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$

dan nol selainnya

Tentukan P (X1<0.5), P(X2>0.75), P(X1<0.5, X2>0.75), P(X1<X2)

Tentukan CDF dari peubah acak ganda tersebut

CONTOH : Tentukan c bila fkp dari peubah acak X1,X2 adalah

$$f(x_1, x_2) = cx_1x_2 \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$

dan nol selainnya

Tentukan P (X1<0.5), P(X2>0.75), P(X1<0.5, X2>0.75), P(X1<X2)
P(X1+X2>1.5)

Tentukan CDF dari peubah acak ganda tersebut

Definisi

Jika pasangan (X1,X2) adalah peubah-peubah acak kontinu, maka fkp marjinal bagi X1 dan X2 adalah :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1$$

CONTOH : Tentukan fkp marjinal bagi peubah acak X dan Y bila fkp bersamanya adalah

$$f(x,y) = 4x_1x_2 \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$

CONTOH : Tentukan fkp marjinal bagi peubah acak X dan Y bila fkp bersamanya adalah

$$f(x,y) = 1 \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1, y < x/2$$

Hitung P(0.1<Y<0.7) dan P(0.5 < X < 1.2)

Definisi

Jika pasangan (X1,X2) adalah peubah-peubah acak kontinu, maka fkp marjinal bagi X1 dan X2 adalah :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1$$

KEBEBASAN PEUBAH ACAK

Definisi

Peubah acak $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ dikatakan saling bebas jika untuk setiap $a_i < b_i$,

$$P[a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_k \le X_k \le b_k] = \prod_{i=1}^{k} P[a_i \le X_i \le b_i]$$

CONTOH : Diketahui fkp marjinal dari peubah acak X dan Y adalah

$$f(x, y) = 1 \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1, y < x/2$$

Apakah kedua peubah acak tersebut saling bebas?

KEBEBASAN PEUBAH ACAK

Teorema

Peubah acak (X_1, X_2 , …,X_k) dikatakan saling bebas jika dan hanya jika sifat-sifat berikut ini terpenuhi.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_1(x_1) \ldots F_k(x_k)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_1(x_1) \ldots f_k(x_k)$$

Dimana $F_i(x_i)$ dan $f_i(x_i)$ masing-masing adalah CDF dan fkp bersama bagi Xi

KEBEBASAN PEUBAH ACAK

Teorema

Dua (X_1, X_2) dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$ saling bebas jika dan hanya jika

1. "Support set" $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) > 0\}$ adalah hasil kali kartesian dari A x B

2. $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$

   Cat : g(x1) dan h(x2) tidak harus merupakan fkp marjinal

CONTOH : Tentukan apakah peubah acak X1 dan X2 dengan fkp bersama berikut saling bebas

			x2	
		0	1	2
	0	0.1	0.1	0.1
x1	1	0.1	0.2	0.1
	2	0.1	0.1	0.1

			x2		
		0	1	2	3
	0	0.008	0.048	0.096	0.064
x1	1	0.048	0.192	0.192	0.000
	2	0.096	0.192	0.000	0.000
	3	0.064	0.000	0.000	0.000

CONTOH : Tentukan apakah peubah acak X1 dan X2 dengan fkp bersama berikut saling bebas

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \qquad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \qquad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$

SEBARAN BERSYARAT

Definisi

Fkp bersyarat : Jika X_1 dan X_2 adalah peubah acak (diskret atau kontinu) dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$ maka fkp bersyarat dari X_2 jika diberikan $X_1 = x_1$ didefinisikan sebagai

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

Untuk nilai x1 sehingga $f_1(x_1) > 0$ dan nol selainnya

CONTOH : Tentukan fkp bersyarat $f(x_2 \mid x_1)$

			x2	
		0	1	2
	0	0.1	0.1	0.1
x1	1	0.1	0.2	0.1
	2	0.1	0.1	0.1

CONTOH : Tentukan fkp bersyarat $f(y \mid x)$ jika diketahui fkp bersama dari kedua peubah acak dinyatakan sebagai :

$$f(x,y) = 1 \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1, y < x/2$$

Selanjutnya, tentukan P(0.1<Y<0.7|X=0.5). Bandingkan dengan

Teorema

Jika X_1 dan X_2 adalah peubah acak dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$ dan fkp marjinal $f_1(x_1)$ dan $f_2(x_2)$ maka

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2 | x_1) = f_2(x_2) f(x_1 | x_2)$$

dan jika X1 dan X2 saling bebas, maka

$$f(x_1 | x_2) = f_1(x_1)$$

dan

$$f(x_2 | x_1) = f_2(x_2)$$

CONTOH ACAK

Definisi

Contoh acak. Himpunan peubah acak $X_{1,} \ldots., X_n$ dikatakan contoh acak berukuran n dari populasi dengan fkp f(x) jika fkp bersamanya berbentuk

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1)\ldots.f(x_n)$$

Catatan : $X_{1,} \ldots., X_n$ contoh acak jika

- $X_{1,} \ldots., X_n$ saling bebas
- $X_{1,} \ldots., X_n$ memiliki sebaran yang sama

STATISTIKA MATEMATIKA I

Sifat-sifat Peubah Acak

Hazmira Yozza – Izzati Rahmi HG
Jurusan Matematika FMIPA Unand

SIFAT-SIFAT NILAI HARAPAN

TEOREMA 6.1

Jika $\boldsymbol{X}$=(X_1, X_2,…X_k) memiliki fkp bersama $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dan jika $Y=u(X_1, X2, \ldots, X_k)$ adalah fungsi dari $\boldsymbol{X}$, maka E(Y)=E$_{\boldsymbol{X}}$[$u(X_1, X_2, \ldots X_k)$], dimana

$$E_X[u(X_1,X_2,\ldots,X_k)] = \sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k} u(x_1,x_2,\ldots,x_k)f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

Jika X diskret

$$E_X[u(X_1,X_2,\ldots,X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_k)f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

Jika X kontinu

CONTOH

Diketahui fkp bersama dari peubah acak X1 dan X2 adalah :

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \qquad 0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < 1$$

Tentukan E(X1 X2), E(X1), E(X2)

Diketahui fkp bersama dari peubah acak X1 dan X2 adalah :

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1$$

Tentukan E((X1+X2)), E(2X2), E(X1X2), E(X1)

CONTOH

Misalkan X dan Y adalah peubah acak diskret dengan fkp bersama $f(x,y)=4/(5xy)$ jika $x = 1,2$ dan $y = 2,3$ dan 0 selainnyag, tentukan :

Tentukan E(X), E(Y), E(XY)

Peubah acak X dan Y memiliki fkp bersama

		1	2
Y	2	2/15	4/15
	3	3/15	6/15

Tentukan E(2XY), E(Y) , E(X), E(XY)

SIFAT-SIFAT NILAI HARAPAN

TEOREMA 6.2

Jika X_1 dan X_2 adalah peubah acak dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$, maka :

$$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

TEOREMA 6.3

Jika X dan Y adalah peubah acak yang saling bebas dan $g(x)$ dan $h(y)$ adalah fungsi, maka :

$$E[(g(X)h(Y)] = E[(g(X)]\ E[h(Y)]$$

KOVARIANS

DEFINISI 6.1.

Kovarians dari sepasang peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Notasi lain : σ_{XY}

TEOREMA 6.4.

Jika X dan Y adalah peubah acak, a dan b adalah konstanta, maka :

$$\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X+a,\ Y+b) = \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,\ aX+b) = a\mathrm{Var}(X)$$

KOVARIANS

DEFINISI 6.1.

Kovarians dari sepasang peubah acak X dan Y didefinisi-kan sebagai :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Notasi lain : σ_{XY}

TEOREMA 6.4.

Jika X dan Y adalah peubah acak, a dan b adalah konstanta, maka :

$$\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X+a, Y+b) = \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X, aX+b) = a\mathrm{Var}(X)$$

TEOREMA 6.5.

Jika X dan Y adalah peubah acak maka :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)E(Y)$$

KOVARIANS

TEOREMA 6.5.

Jika X dan Y adalah peubah acak maka :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)E(Y)$$

TEOREMA 6.6.

Jika X_1 dan X_2 adalah peubah acak dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$ maka :

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

Bila X_1 dan X_2 saling bebas, maka :

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$$

TEOREMA 6.6.

Jika X_1 dan X_2 adalah peubah acak dengan fkp bersama $f(x_1, x_2)$ maka :

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

Bila X_1 dan X_2 saling bebas, maka :

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)$$

Diketahui bahwa X_1, X_2, X_3 dan X_4 adalah peubah acak yang saling bebas dengan fkp yang identik dengan nilai tengah 5 dan simpangan baku 3.

Misalkan $Y = X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4$

Tentukan E(Y) dan Var(Y)

CONTOH

Diketahui bahwa X_1, X_2, X_3 dan X_4 adalah peubah acak yang saling bebas dengan fkp yang identik dengan nilai tengah 5 dan simpangan baku 3.

Misalkan $Y = X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4$

Tentukan E(Y) dan Var(Y)

Misalkan X dan Y adalah peubah acak diskret dengan fkp bersama $f(x,y)=4/(5xy)$ jika x = 1,2 dan y = 2,3 dan 0 selainnyag, tentukan :

Tentukan E(X), E(Y), E(XY) dan Cov(X,Y)

KORELASI

DEFINISI 6.2.

Jika X dan Y adalah peubah acak dengan ragam σ_X^2 dan σ_Y^2 dan kovarians $\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y)$ maka koefisien korelasi dari *X* dan *Y* adalah :

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

TEOREMA 6.7.

Jika ρ adalah koefisien korelasi dari *X* dan *Y*, maka :

$$-1 \le \rho \le 1$$

Dan $\rho = \pm 1$ jika dan hanya jika $Y = aX + b$ dengan peluang 1 untuk beberapa $a \neq 0$ dan b.

NILAI HARAPAN BERSYARAT

DEFINISI 6.3.

Jika X dan Y adalah peubah acak maka peluang bersyarat Y jika diberikan X = x adalah :

$$E(Y \mid x) = \sum_y y f(y \mid x) \qquad \text{jika } X \text{ dan } Y \text{ diskret}$$

$$E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x)\,dy \qquad \text{jika } X \text{ dan } Y \text{ diskret}$$

Fungsi kepekatan peluang bersyarat Y jika diketahui bahwa X = x

adalah : $f(y \mid x) = \dfrac{2}{x} \qquad 0 < y < \dfrac{x}{2}$

Tentukan E(Y|x)

TEOREMA 6.9.

Jika X dan Y adalah peubah acak yang saling bebas, maka

$$E[(Y \mid x)] = E(Y)$$

dan

$$E[(X \mid y)] = E(X)$$

NILAI HARAPAN BERSYARAT

TEOREMA 6.8.

Jika X dan Y adalah peubah acak ganda, maka

$$E[E(Y \mid X)] = E(Y)$$

CONTOH

Misalkan diketahui bahwa X = banyaknya kesalahan pengejaan kata dalam makalah yang dibuat A merupakan peubah acak yang menyebar menurut sebaran Poisson dengan E(X)=20. A meminta B untuk memeriksa makalah yang dibuatnya dengan harapan dapat menemukan kesalahan pengejaan kata dalam makalahnya. Secara rata-rata, B menemukan 85% kesalahan.

RAGAM BERSYARAT

DEFINISI 6.4.

Ragam bersyarat dari Y jika diberikan X = x adalah :

$$\mathrm{Var}(Y \mid x) = E\{[Y - E(Y \mid x)]^2 \mid x\}$$

$$\mathrm{Var}(Y \mid x) = E(Y^2 \mid x) - [E(Y \mid x)]^2$$

TEOREMA 6.10.

Jika *X* dan *Y* peubah acak ganda dan h(x,y) adalah fungsi maka :

$$Var(Y) = E_X[Var(Y|X)] + Var_X[E(Y \mid X)]$$

TEOREMA 6.11.

Jika X dan Y peubah acak ganda dan $h(x,y)$ adalah fungsi maka :

$$\mathrm{E}[h(x,y)] = \mathrm{E}_X\{\mathrm{E}[h(x,y)]\}$$

TEOREMA 6.12.

Jika X dan Y peubah acak ganda dan $g(x)$ adalah fungsi maka :

$$\mathrm{E}[g(X)Y \mid x] = g(X)E(Y \mid x)$$

TEOREMA 6.13.

Jika E(Y | x) adalah fungsi yang linier dari x, maka :

$$E(Y \mid x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

dan

$$E_X[Var(Y \mid X) = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

Sebaran Normal Ganda

DEFINISI 6.5.

Sepasang pa X dan Y dikatakan menyebar normal ganda jika memiliki fkp bersama :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho}}$$

$$\text{x}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

NOTASI (X,Y)~BVN(μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ)

Sebaran Normal Ganda

TEOREMA 6.14.

Jika $(X,Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, maka :

$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ dan $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

Sedangkan ρ adalah koefisien korelasi antara X dan Y

TEOREMA 6.15.

Jika $(X,Y) \sim BVN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, maka :

1. Dengan syarat X = x

$$Y \mid x \sim N\left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right]$$

2. Dengan syarat Y = y

$$X \mid y \sim N\left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right]$$

FPM BERSAMA

DEFINISI

FPM bersama dari **X=**(X1, X2,…., Xk) didefinisikan sebagai :

$$M_X(t) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k} t_i X_i\right)\right]$$

Dimana t = (t1, t2,…,tk) dan –h<ti<h untuk h>0

Selamat Belajar!

LOGO

SEBARAN FUNGSI PEUBAH ACAK

Diketahui X~F(x)

Terdapat fungsi Y = u(X)

Y adalah peubah acak.

Sebarannya ????

Metode

Met. CDF

Met. FPM

Met. Transformasi

METODE CDF

- Ide Dasar : menyatakan CDF dari Y dalam sebaran X

- CDF dari X : $F_X(x) = P(X \le x)$
- Y=u(X)
- CDF dari Y

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(u(X) \le y) \\
&= P(X \le u^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

- Fkp dari Y

$$
f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)
$$

CONTOH

Diketahui bahwa peubah acak X memiliki CDF

$$F_X(x) = 1 - e^{-2x} \quad x > 0$$

Peubah acak Y dinyatakan sebagai $Y = e^X$

Tentukan fkp dari Y

CONTOH

Diketahui bahwa peubah acak X memiliki CDF

$$F_X(x) = 1/4 \ \mathit{untuk} \ -2 < x < 2$$

Peubah acak Y dinyatakan sebagai $Y = X^2$

Tentukan fkp dari Y

METODE FPM

<u>Teorema</u> : Jika X1, X2, …, Xn adalah peubah acak yang saling bebas dengan FPM masing-masing $M_{xi}(t)$, maka FPM dari $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ adalah:

$$M_Y(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t)$$

Bukti :

Ingat : Jika peubah acak X dan Y saling bebas E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y))

METODE FPM

- Biasanya digunakan untuk mendapatkan fkp dari $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X merupakan anggota keluarga eksponensial (Binomial, Binom Neg. Geometrik, Poisson, Normal, Gamma, Eksponensial)
- Sebaran dari Y diperoleh melalui pengenalan FPM dari peubah acak yang telah ada

FPM BEBERAPA PEUBAH ACAK

SEBARAN	FS. PEMBANGKIT MOMEN
BIN(n,p)	$M_X(t) = (pe^t + q)^n$
NB(r,p)	$M_X(t) = \left(pe^t / (1 - qe^t)\right)^r$
GEO(p)	$M_X(t) = \left(pe^t / (1 - qe^t)\right)$
POI(μ)	$M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$
N(μ,σ2)	$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
GAM(θ,κ)	$M_X(t) = \left(1/(1 - \theta t)\right)^\kappa$
EXP(θ)	$M_X(t) = 1/(1 - \theta t)$

CONTOH

Diketahui bahwa peubah acak Xi (i=1,2,…,n) saling bebas menurut sebaran EXP(θ).

Tentukan sebaran dari $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

CONTOH

Diketahui bahwa peubah acak Xi (i=1,2,…,10) saling bebas menurut sebaran GAM(θ,κi).

Tentukan sebaran dari $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$

CONTOH

Diketahui bahwa peubah acak Xi (i=1,2,…,n) saling bebas menurut sebaran $N(\mu_i, \sigma_i^2)$

Tentukan sebaran dari $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

MET.TRANSFORMASI : 1 VAR

- Misalkan terdapat peubah x
- Misalkan y=u(x) adalah fungsi dari peubah x
- Bila persamaan y=u(x) memiliki solusi yang unik, katakanlah x=w(y) [w adalah fs. Balikan dari u], maka u(x) dikatakan fungsi satu-satu
- Bila tidak, maka u(x) bukan merupakan fungsi dari satu-satu

$$y = e^x \qquad x \in R$$

$$y = 2x + 1 \qquad x \in R$$

$$y = x^2 \qquad x \in R$$

$$y = x^2 \qquad x > 0$$

$$y = |x| \qquad x < 0$$

TRANSFORMASI SATU-SATU

TEOREMA. KASUS DISKRET

Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fkp $f_X(x)$ dan $Y=u(X)$ adalah fungsi satu-satu, dengan kata lain, persamaan $y=u(x)$ dapat diselesaikan secara unik, katakanlah $x=w(y)$. Fkp dari Y adalah :

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \qquad y \in B$$

dimana

$$B = \{y \mid f_Y(y) > 0\}$$