

Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

Pada tahun 1930, Ramsey mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar-tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Teori ini dikenal dengan Teori Ramsey. Kemudian, Erdős dan Szekeres (1935) mengaplikasikan teori ini ke dalam teori graf. Teori Ramsey mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi (Espino, 2004). Pada bidang matematika, di samping teori graf, teori Ramsey juga tumbuh dan berkembang diantaranya dalam teori bilangan, aljabar, geometri, topologi, analisis harmonik, ruang metrik, dan teori ergodik (Rosta, 2004).



LPPM Universitas Andalas

Gedung Rektorat Lantai 2 Kampus Unand
Limau Manis, Kota Padang - Sumatera Barat
Indonesia

Web: www.lppm.unand.ac.id

Telp. 0751-72645

Email: lppm.unand@gmail.com

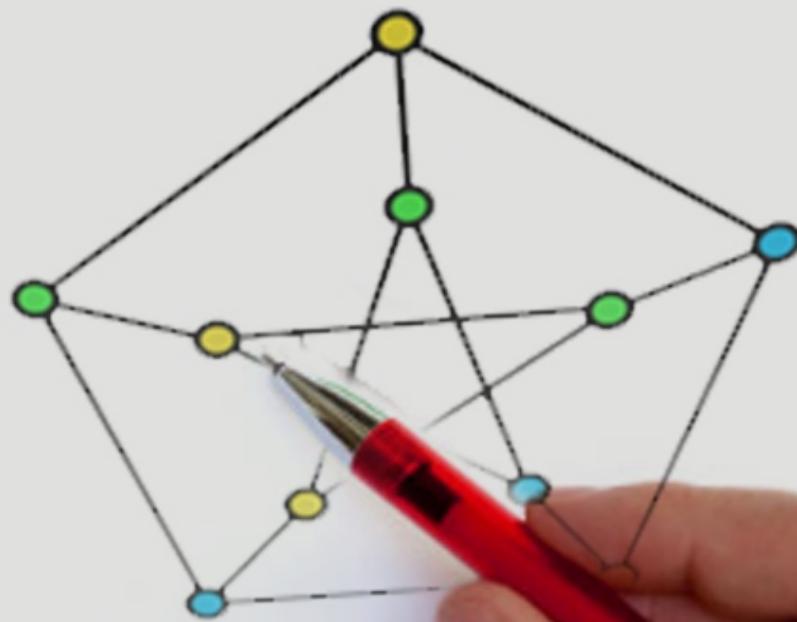


Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

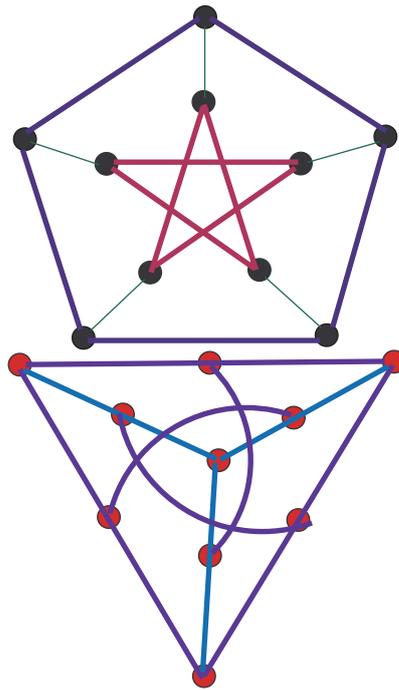
Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

Syafrizal Sy

Edy Tri Baskoro



Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran



**Syafrizal Sy
Edy Tri Baskoro**

Dewan Editor: Surahmat (Profesor Teori Ramsey)

Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

Penulis:

Syafrizal Sy, Edy Tri Baskoro

Editor:

Surahmat

ISBN : 978-623-395-211-8

Penerbit:

LPPM – Universitas Andalas

Gedung Rektorat Lantai 2 Kampus Unand Limau Manis Kota Padang

Sumatera Barat Indonesia

Web: www.lppm.unand.ac.id

Telp. 0751 – 72645

Email: lppm.unand@gmail.com

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk apapun dan dengan cara apapun tanpa ijin tertulis dari penerbit

Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

Syafrizal Sy
Profesor Matematika
Universitas Andalas
Padang, Indonesia

Edy Tri Baskoro
Profesor Matematika
Institut Teknologi Bandung
Bandung, Indonesia

Terimakasih Kepada:
Saladin Uttunggadewa (Dosen Matematika ITB)
Hilda Assiyatun (Dosen Matematika ITB)
A.N.M. Salman (Dosen Matematika ITB)

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala karunia-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga kami dapat menyusun buku yang berjudul **Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran**. Adapun materi-materi yang termuat di dalam buku ini adalah merupakan hasil kumpulan riset penulis dalam bentuk karya ilmiah yang diperoleh sejak penulis mendalami Teori Ramsey tahun 2005. Buku ini ditulis dengan harapan dapat memenuhi kriteria buku referensi berbasis penelitian tentang Teori Graf, khususnya kajian bilangan Ramsey.

Pada tahun 1930, Ramsey mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar-tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Teori ini dikenal dengan Teori Ramsey. Kemudian, Erdős dan Szekeres (1935) mengaplikasikan teori ini ke dalam teori graf. Teori Ramsey mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi (Espino, 2004). Pada bidang matematika, di samping teori graf, teori Ramsey juga tumbuh dan berkembang diantaranya dalam teori bilangan, aljabar, geometri, topologi, analisis harmonik, ruang metrik, dan teori ergodik (Rosta, 2004).

Dalam dua papernya yang terpisah (2004), Burger dan Vuuren memperkenalkan dua konsep bilangan Ramsey multipartit sebagai berikut. Misalkan j, n, l, s , dan t adalah bilangan-bilangan asli dengan $n, s \geq 2$. *Bilangan Ramsey multipartit himpunan* $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ dan *Bilangan Ramsey multipartit ukuran* $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$. Pada kedua papernya tersebut, Burger dan Vuuren memberikan sifat-sifat dasar, batas bawah dan batas atas untuk kedua bilangan Ramsey multipartit tersebut (himpunan dan ukuran), serta kaitan antara keduanya. Di samping itu, Burger dan Vuuren juga memberikan kaitan antara kedua bilangan Ramsey multipartit tersebut dengan bilangan Ramsey klasik. Kemudian, penulis membuat suatu perluasan konsep yang diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren di atas, yaitu dengan menghilangkan sifat *kelengkapan* (*completeness*) dari graf yang diberikan. Dari perluasan konsep bilangan Ramsey multipartit ukuran di atas, diperoleh pengertian bilangan Ramsey multipartit sebagai berikut. Untuk setiap graf G_1 dan G_2 , dan bilangan asli $j \geq 2$, *bilangan Ramsey multipartit* $m_j(G_1, G_2)$ adalah bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{j \times t}$ diberi pewarnaan merah-biru maka graf multipartit seimbang lengkap $K_{j \times t}$ akan memuat subgraf G_1 merah atau subgraf G_2 biru, dan didefinisikan tak hingga jika tidak terdapat bilangan asli t di atas.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada Ketua LPPM Universitas Andalas yang telah memberikan insentif dan kesempatan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bentuk Buku Monograf. Selain itu, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rektor Universitas Andalas yang telah memberikan kepercayaan dan pembinaan sehingga penulis mampu mengembangkan diri di bidang penelitian. Kepada Ketua Departemen Matematika Universitas Andalas dan rekan-rekan sejawat dalam tim penelitian, penulis menyampaikan terima kasih atas kerja sama yang terjalin dengan baik serta keluarga yang

telah memberikan motivasi sehingga buku ini dapat diselesaikan. Semoga buku monograf Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya pengembangan dalam Teori Graf.

Padang - Bandung, Oktober 2021

Syafrizal Sy & Edy Tri Baskoro

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	iii
Daftar Gambar	v
I Pendahuluan	1
I.I Definisi Dasar dari Teori Graf	1
I.II Teori Ramsey Klasik	2
I.III Teori Ramsey Graf	3
I.IV Teori Ramsey Multipartit	4
I.IV.I Bilangan Ramsey multipartit-himpunan	5
I.IV.II Bilangan Ramsey multipartit-ukuran	7
II Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_s, P_n)$ dengan $2 \leq s \leq 3$	11
II.I Survey Literatur	11
II.II P_n versus P_s dengan $s = 2, 3$	11
II.III P_n versus P_4	14
III Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_s, G)$ dengan $2 \leq s \leq 3$ dan G graf lainnya	20
III.I Survey Literatur	20
III.II Path versus Graf Lainnya	21
IV Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_n, C_3)$ dengan $n \geq 2$	24
IV.I Survey Literatur	24
IV.II Path versus Cycle	24
V Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_3, K_{s \times 2})$ dengan $j, s \geq 2$	29
V.I Survey Literatur	29
V.II Path versus Graf <i>Cocktail Party</i>	29
V.III Path versus $(P_n, K_{2 \times 2})$	33
VI Batas Bawah Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_n, K_{j \times b})$	39
VI.I Survey Literatur	39
VI.II Path versus Graf Multipartit Seimbang Lengkap	39
VII Bilangan Ramsey Bipartit Ukuran $m_2(P_n, T_s)$	43
VII.I Survey Literatur	43
VII.II Path versus Tree	43
VIII Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_2(P_4, K_{1,n})$ dengan $2 \leq s \leq 3$	47
VIII.I Survey Literatur	47
VIII.II Path versus Star	47

IX Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(S_m, C_n)$	49
IX.I Survey Literatur	49
IX.II Star versus Cycle	49
X Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $K_{s \times t}$ versus Lintasan	54
X.I Survey Literatur	54
X.II Path versus $K_{s \times t}$ kecil	55
Daftar Pustaka	57
Daftar Simbol	60
Indeks	61
Daftar Riwayat Hidup	61

Daftar Gambar

II.1	Terdapat tiga lintasan biru yang lebih panjang yang diawali dari titik $a \in R_1$ dan diakhiri di titik $f \in S_1$	12
II.2	(i) Lintasan biru ${}_gP_h$ (ii) Lintasan biru ${}_uP_v$	13
II.3	(a) Partisi baru. (b) $F_3[E'] \supset K_{1,k}$. (c) $F_3[E'] \supset 2K_{1,k-1}$	18
II.4	Illustration of Subcase 3.2.	19
IV.1	Suatu $(P_n, C_3; 3(r-1))$ -good graph menunjukkan $m_3(P_n, K_{3 \times 1}) \geq r$	25
IV.2	(i) Untuk $V_a = V_b$. (ii) F_1 tidak terhubung.	27
IV.3	Suatu $(P_n, C_4; K_{2 \times (s-1)})$ -good graph yang menunjukkan $m_2(P_n, C_4) \geq s$	27
IV.4	Konstruksi graf $K_{2 \times 2}$ di F_2	28
V.1	(a) G_1 untuk j genap (b) G_1 untuk j ganjil.	30
V.2	$K_{4 \times 3} \supset K_{3 \times 2}$ di $F_2[V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z]$	31
V.3	$K_{3 \times 3} \supset K_{2 \times 2}$ di $F_2[V \cup V_u \cup V_d]$	33
V.4	Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari P_{n-1} untuk $ X \leq 1$	34
V.5	Ilustrasi <i>path</i> P_{n-1} untuk Kasus 1.	35
V.6	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 1.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 1.2.	35
V.7	Ilustrasi P_{n-1} untuk Kasus 2.	36
V.8	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 2.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 2.2.	36
V.9	Ilustrasi dari <i>path</i> P_{n-1} untuk Kasus 3.	36
V.10	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 3.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 3.2.	37
V.11	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 4.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 4.2.	37
V.12	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 5.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 5.2.	38
VI.1	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > r - 1$	40
VI.2	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > jb - 1$	40
VI.3	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > t - 1$	41
VI.4	Ilustrasi untuk Kasus 1. $n = 3$	42
VI.5	Illustration for Case 2. $n = 4$ or 5	42
IX.1	$G_1 \not\cong S_4$ and $G_2 \not\cong C_6$	50
IX.2	Suatu graf bipartit G_2 untuk Subkasus 2.2	52

Bab I Pendahuluan

I.1 Definisi Dasar dari Teori Graf

Teori graf merupakan salah satu objek studi subdisiplin kombinatorial dalam teori Ramsey. Dalam bagian ini akan diberikan terminologi yang melingkupinya didefinisikan yang akan digunakan. Suatu **graf** G adalah himpunan tak-kosong berhingga $V(G)$ dari objek-objek yang disebut **titik** (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ dari himpunan bagian 2-elemen dari $V(G)$ yang disebut **sisi** (*edge*). Himpunan $V(G)$ dikatakan **himpunan titik** dari G dan Himpunan $E(G)$ dikatakan **himpunan sisi** dari G . Jumlah titik dari suatu graf G dikatakan **order** dan Jumlah sisi dari suatu graf G dikatakan **size**. Order dari G adalah $|V(G)|$ dan size dari G adalah $|E(G)|$.

Suatu titik u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v jika $uv \in EG$. Untuk suatu titik v dari G , **lingkungan** (*neighborhood*) adalah suatu himpunan yang didefinisikan $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ dan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Selanjutnya, untuk suatu titik $v \in G$ dan suatu subgraf H dari G , didefinisikan $N_H(v) = N(v) \cap V(H)$. Misalkan titik x di G , **derajat** (*degree*) dari suatu titik x ditulis $d_G(x)$, yaitu $d_G(x) = |N_G(x)|$. **Derajat minimum** (*minimum degree*) dari G ditulis $\delta(G)$ dan **derajat maksimum** (*maximum degree*) dari G ditulis $\Delta(G)$.

Jika $e = uv$ adalah sisi di G , maka e dan u (dan e dan v) dikatakan **insidensi** (*incidence*) di G . Jika e dan f adalah dua sisi berbeda yang insidensi dengan titik yang sama, maka e dan f dikatakan **sisi-sisi bertetangga**. Suatu subhimpunan M dari $E(G)$ dikatakan **matching** di G jika tidak ada titik yang terkait dengan lebih dari satu sisi di M . **Komplemen** (*complement*) \bar{G} dari suatu graf G yaitu suatu graf dengan $|\bar{G}| = |G|$ dan $uv \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$.

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat fungsi satu ke satu, sebut $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, sedemikian serhingga $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$, yang mana ditulis $G_1 \simeq G_2$. Suatu graf H dikatakan subgraf dari suatu gra G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Misalkan S adalah himpunan tak kosong titik-titik dari suatu gra G . Suatu **subgraf yang diinduksi** (*induced subgraph*) oleh S adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik S , ditulis $\langle S \rangle$, yaitu $\langle S \rangle$ memuat sisi-sisi di G yang berinsidensi dengan dua titik di S . Suatu subgraf H dari suatu graf G dikatakan suatu **subgraf induksi-titik** dari G , jika $H = \langle S \rangle$ untuk suatu himpunan tak kosong titik-titik, S , dari G .

Jalan (*walk*) dalam suatu graf G adalah barisan $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ ($n \geq 0$) dari titik dan sisi yang bergantian, dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Jika $v_0 = v_n$ maka jalan tersebut dikatakan **jalan tertutup** (*closed walk*). Jalan dikatakan mempunyai **panjang**

(*length*) n , jika terdapat (tidak harus berbeda) n sisi. Suatu **jejak** (*trail*) adalah suatu jalan yang mana tidak ada sisi yang berulang. Suatu **path** adalah suatu jalan yang mana tidak ada titik yang berulang. Suatu **cycle** C_n adalah suatu jalan $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ yang mana $n \geq 3, v_0 = v_n$, dan n titik v_1, v_2, \dots, v_n berbeda. Misalkan u dan v adalah dua titik di graf G . Dikatakan u **joined** ke v jika G memuat path $u - v$. Graf G dikatakan **terhubung** (*connected*) jika u terhubung ke v untuk setiap pasang titik, (u, v) , di G .

Suatu graf G dikatakan **graf lengkap** (*complete graph*) berorde p , ditulis K_p , jika setiap dua titik (berbeda) bertetangga. Jika G adalah graf **n-partit** yang mempunyai himpunan-himpunan partit V_1, V_2, \dots, V_n sedemikian sehingga setiap titik dari V_i bertetangga ke setiap titik di V_j , dimana $1 \leq i < j \leq k$, maka G disebut **graf lengkap n-partit**. Jika $|V_i| = p_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka ditulis $K_{=p_1, p_2, \dots, p_n}$. Dalam hal $n = 2$, *graf lengkap 2-partit* dikatakan **graf bipartit**. Graf tersebut juga dikatakan **graf multipartit lengkap**. Jika $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ maka G dikatakan **graf partit- n seimbang**. Suatu notasi $K_{n \times l}$ dikatakan **graf partit- n seimbang lengkap** dengan n himpunan partit dan l titik per himpunan partit.

Suatu graf lengkap dengan satu sisi e dihapus ditulis $K_p - e$. Suatu graf **star**, $K_{1,n}$, adalah suatu graf bipartit $n + 1$ titik dengan satu partit terdiri dari satu titik, dan $K_{1,n} \simeq S_{n+1}$. Suatu graf **wheel**, W_n , adalah hasil dari sebuah titik yang dihubungkan ke setiap titik dari suatu *cycle* C_{n-1} . Jadi, $W_n \cong C_n + \{x\}$. Suatu **windmil** M_{2n} adalah suatu graf yang diperoleh dari W_{2n} dengan menghapus n buah *disjoint non-rim* sisi. Suatu **fan** F_n adalah suatu graf $\{x\} + P_n$. Suatu graf G dengan n titik dikatakan **pancyclic** jika G memuat *cycles* yang setiap panjangnya adalah l dengan $3 \leq l \leq n$.

Ada beberapa cara untuk menghasilkan suatu graf dari graf-graf lain. **Gabungan** (*union*) dari G_1 dan G_2 , ditulis $G_1 \cup G_2$, adalah suatu graf yang mempunyai $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika $G_1 \simeq G_2 \simeq G$, maka ditulis $2G$ untuk $G_1 \cup G_2$. Secara umum, jika $G_1 \simeq \dots \simeq G_n$ maka $nG = G_1 \cup \dots \cup G_n$. Jika G_1 dan G_2 dua graf yang titik-titiknya terpisah (*disjoint*), maka **join** dari G_1 dan G_2 , sebut $G_1 + G_2$, yaitu suatu graf yang terdiri dari gabungan, $G_1 \cup G_2$ bersama dengan semua sisi dari tipe $v_1 v_2$ dimana $v_1 \in G_1$ dan $v_2 \in G_2$.

I.II Teori Ramsey Klasik

Salah satu problem fundamental dalam logika matematika adalah mencari prosedur teratur untuk menentukan benar tidaknya (konsistensi) suatu formula logika yang diberikan. Ramsey [36] adalah salah satu yang mengkaji problem tersebut. Teorema berikut digunakan [36] untuk menyelesaikan problem logika di atas.

Teorema I.1 Untuk setiap bilangan bulat positif r, n , dan μ , terdapat bilangan bulat positif M_0 sedemikian sehingga untuk $m \geq M_0$ dan jika semua r -subhimpunan (subhimpunan dengan r elemen) dari suatu m -himpunan Γ_m dikelompokkan (menurut

sebarang aturan) ke dalam kelas-kelas saling lepas C_i ($i = 1, 2, \dots, \mu$), maka Γ_m akan memuat subhimpunan Δ_n dengan semua r -subhimpunan dari Δ_n menjadi anggota C_i yang sama.

Pengetahuan tentang seberapa besar nilai M_0 yang dapat diambil bila diberikan bilangan bulat positif r, n dan μ , selanjutnya, menjadi pusat perhatian. Ramsey [?] memperoleh $M_0 = n!!!\dots!$, dengan proses faktorial dilakukan sebanyak $\mu - 1$ kali untuk kasus $r = 2$. Namun demikian, nilai M_0 tersebut masih dipandang terlalu besar.

I.III Teori Ramsey Graf

Selanjutnya, teorema di atas disebut dengan **Teorema Ramsey**. Erdős dan Szekeres [15] mengaplikasikan teorema tersebut ke dalam teori graf, dengan mengambil $r = 2$ dan $\mu = 2$. Dalam bahasa graf, Γ_m menyatakan graf lengkap K_m dengan m titik, Δ_n menyatakan graf lengkap K_n dengan n titik dan setiap 2-subhimpunan menyatakan sisinya. Pengelompokan ke dalam dua kelas saling lepas ($\mu = 2$) dapat dipandang sebagai pewarnaan sisi dengan dua warna. Sehingga, dalam bahasa graf, Teorema Ramsey I.1 dapat disajikan sebagai berikut.

Teorema I.2 Untuk setiap nilai a dan b , terdapat bilangan bulat M_0 sedemikian sehingga jika $m \geq M_0$ maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_m akan memuat subgraf lengkap K_a warna merah atau subgraf K_b warna biru.

Bilangan *terkecil* M_0 pada Teorema I.2 disebut dengan **bilangan Ramsey klasik** untuk nilai a dan b , dan dinotasikan dengan $R(a, b) = M_0$.

Penentuan bilangan Ramsey klasik untuk pasangan nilai a dan b telah memperoleh banyak perhatian. Namun demikian, hasilnya masih jauh dari yang diharapkan. Hingga kini, hanya **sembilan** bilangan Ramsey klasik telah diketahui. Greenwood dkk. [19] menemukan empat bilangan Ramsey yakni: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$ dan $R(4, 4) = 18$. Kery [30] menunjukkan $R(3, 6) = 18$. Kalbfleisch [29] mendapatkan $R(3, 7) = 23$, dan Grinstead dkk. [20] menemukan bilangan Ramsey $R(3, 8) = 28$ dan $R(3, 9) = 36$. Bilangan Ramsey klasik terbaru adalah $R(4, 5) = 25$. Bilangan Ramsey ini ditemukan McKay dan Radziszowski [32] dengan menggunakan bantuan komputer. Penentuan bilangan Ramsey klasik lainnya masih merupakan masalah terbuka (*open problem*), diantaranya $R(5, 5)$ dan $R(3, 10)$ yang kini banyak dikaji orang. Walaupun pengetahuan tentang bilangan Ramsey klasik masih relatif sedikit, namun studi perluasan Teori Ramsey juga telah banyak dikaji. Salah satu perluasannya adalah sebagai berikut.

Diberikan dua graf G dan H . Tentukan bilangan bulat positif terkecil N sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi

graf lengkap K_N akan memuat subgraf dengan sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf G atau memuat subgraf dengan sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf H .

Bilangan N di atas sebagai *bilangan Ramsey graf* $R(G, H)$ untuk kombinasi antara graf G dan H . Selanjutnya, studi bilangan Ramsey graf ini berkembang pesat menjadi suatu bidang tersendiri dalam Teori Ramsey.

Studi bilangan Ramsey graf ini telah banyak dilakukan untuk berbagai macam kombinasi graf. Batas bawah bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ untuk sebarang graf G dan H telah ditemukan Chvátal dan Harary [9] yakni $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$ dengan $c(G)$ adalah banyaknya titik dari komponen maksimal dalam graf G dan $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik dari graf H . Khususnya, Chvátal [?] telah menemukan bilangan Ramsey graf $R(T_n, K_m)$ dengan T_n adalah suatu graf pohon yang mempunyai n titik dan K_m adalah suatu graf lengkap yang mempunyai m titik.

I.IV Teori Ramsey Multipartit

Burger dan Vuuren mengkaji dua bentuk bilangan Ramsey multipartit, yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan (Burger dan Vuuren, 2004) dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran (Burger dan Vuuren, 2004a).

Ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(G, H)$ adalah dengan memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik. Sedangkan, ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(G, H)$ adalah dengan memberikan jumlah himpunan partit yang tetap dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum titik dari himpunan-himpunan partit tersebut sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik.

Untuk dua graf G_1 dan G_2 , dan bilangan bulat $j \geq 2$, bilangan bulat terkecil $m_j(G_1, G_2) = t$ sedemikian sehingga setiap faktorisasi dari graf $K_{j \times t} := F_1 \oplus F_2$ memenuhi kondisi berikut: F_1 memuat G_1 sebagai subgraf atau F_2 memuat G_2 sebagai subgraf. Suatu graf $G \cong K_{j \times t}$ dengan n titik dikatakan $(G_1, G_2; n)$ -good graph jika G tidak memuat G_1 dan \overline{G} tidak memuat G_2 .

Suatu graf G dikatakan **factorable** menjadi faktor-faktor G_1, G_2, \dots, G_n jika faktor-faktor ini adalah **pairwise edge-disjoint** dan $\cup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$. Jika G adalah di-faktor menjadi faktor-faktor G_1, G_2, \dots, G_n , maka $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ dikatakan **factorization** dari G .

Pada dua subbab di bawah ini, akan diberikan kajian tentang kedua bilangan Ramsey multipartit seimbang lengkap tersebut.

I.IV.I Bilangan Ramsey multipartit-himpunan

Pengertian bilangan Ramsey multipartit-himpunan didefinisikan sebagai berikut oleh Burger dan Vuuren pada tahun 2004.

Definisi I.1 .

Misalkan j, a, b, c , dan d adalah bilangan-bilangan asli dengan $a, c \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\xi \times j}$ diberi warna merah dan warna biru secara sebarang, maka graf $K_{\xi \times j}$ akan memuat subgraf $K_{a \times b}$ merah atau subgraf $K_{c \times d}$ biru.

Definisi ini merupakan perumuman dari bilangan Ramsey klasik, karena:

$$\text{jika } r(m, n) = t \text{ maka } M_1(K_{m \times 1}, K_{n \times 1}) = t. \quad (\text{I.1})$$

Seperti halnya bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey multipartit-himpunan juga bersifat simetris, yaitu

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = M_j(K_{c \times d}, K_{a \times b}). \quad (\text{I.2})$$

Eksistensi dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan diberikan oleh Burger dan Vuuren (2004), yaitu untuk semua $j, b, d \geq 1$ dan $a, c \geq 2$ berlaku

$$\max\{r(a, c), \min\{\lceil b/j \rceil a, \lceil d/j \rceil c\}\} \leq M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq \binom{ab + cd - 2}{ab - 1}. \quad (\text{I.3})$$

Jika $M_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = x$ maka sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{x \times k}$ senantiasa akan memuat $K_{a \times b}$ merah atau $K_{c \times d}$ biru sebagai subgraf. Jelas bahwa, $K_{x \times k} \subseteq K_{x \times j}$ untuk $k \leq j$. Ini mengakibatkan $K_{x \times j}$ juga akan memuat $K_{a \times b}$ merah atau $K_{c \times d}$ biru sebagai subgraf. Oleh karena itu, jika $k \leq j$ maka

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq M_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}). \quad (\text{I.4})$$

Dari (I.3), diperoleh $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq r(a, c)$ untuk semua $j, b, d \geq 1$ dan $a, c \geq 2$. Sedangkan dari (I.4), didapat $M_j(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) \leq M_1(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) = r(a, c)$. Oleh karena itu, untuk setiap $j \geq 1$ dan $a, b \geq 2$ berlaku

$$M_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) = r(a, b). \quad (\text{I.5})$$

Misalkan $M_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) = y$. Misalkan $a \leq \alpha$, $b \leq \beta$, $c \leq \gamma$ dan $d \leq \delta$ maka sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{y \times j}$ senantiasa memuat $K_{\alpha \times \beta}$ merah (dan juga $K_{a \times b}$ merah) atau $K_{\gamma \times \delta}$ biru (dan juga $K_{c \times d}$ biru) sebagai subgraf. Akibatnya, $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq y$. Oleh karena itu, diperoleh

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq M_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}), \quad (\text{I.6})$$

jika $a \leq \alpha$, $b \leq \beta$, $c \leq \gamma$, dan $d \leq \delta$. Kemudian, Burger dan Vuuren (2004) juga menunjukkan celah (*gaps*) dari dua bilangan Ramsey multipartit-himpunan, yaitu untuk semua bilangan asli $a \geq 3$, $c \geq 2$ dan $j, b, d \geq 1$ berlaku

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq M_j(K_{(a-1) \times b}, K_{c \times d}) + c \lceil d/j \rceil - 1. \quad (\text{I.7})$$

Hanya sedikit bilangan Ramsey multipartit-himpunan yang diketahui (Burger dan Vuuren, 2004). Pernyataan $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4$ dan $M_2(K_{2 \times 2}, K_{4 \times 1}) = 7$ diberikan oleh Harborth dan Mengersen (1996, 2001). Burger dkk. (2004) membuktikan $M_2(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = M_3(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 4$, $M_4(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 3$, dan $M_5(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = M_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 2$ untuk $j \geq 6$.

Nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk kombinasi $K_{2 \times 1}$ dengan sebarang graf multipartit seimbang lengkap adalah sebagai berikut. Misalkan $j, d \geq 1$ dan $c \geq 2$ maka

$$M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) = \lceil d/j \rceil c. \quad (\text{I.8})$$

Untuk membuktikan (I.8), perhatikan sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari $F \cong K_{\lceil d/j \rceil c \times j}$. Jika ada satu sisi dari F yang berwarna merah maka $F \supset K_{2 \times 1}$ merah sebagai subgraf. Jika tidak demikian, maka jelas $F \supset K_{c \times d}$ biru sebagai subgraf, karena $K_{c \times d} \subset K_{\lceil d/j \rceil c \times j}$. Jadi, $M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) \leq c \lceil d/j \rceil$. Kemudian, dengan mewarnai semua sisi dari $K_{(c \lceil d/j \rceil - 1) \times j}$ dengan warna biru, mengakibatkan tidak terdapat $K_{2 \times 1}$ merah ataupun $K_{c \times d}$ biru sebagai subgraf. Jadi $M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) \geq c \lceil d/j \rceil$.

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren juga menemukan bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk dua kombinasi graf seimbang lengkap yaitu $K_{2 \times 2}$ versus $K_{3 \times 1}$.

Teorema I.3 Untuk semua $j \geq 3$, $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$.

Bukti. Dari (I.3), diperoleh $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \geq r(2, 3) = 3$ untuk semua $j \geq 1$. Selanjutnya ditunjukkan $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$. Misalkan $V(G) = \{x_1, \dots, x_9\}$ adalah himpunan titik-titik dari $G \simeq K_{3 \times 3}$ dengan $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$, dan $\{x_7, x_8, x_9\}$ adalah himpunan-himpunan partitnya. Misalkan terdapat pewarnaan merah-biru dari sisi-sisi di G yang tidak memuat $K_{2 \times 2}$ merah dan $K_{3 \times 1}$ biru. Misalkan berturut-turut R dan B adalah subgraf dari G yang diinduksi oleh sisi-sisi merah dan sisi-sisi biru. Karena tidak ada graf dengan jumlah titik ganjil dan setiap titiknya berderajat ganjil, maka perlu diperhatikan kasus berikut:

Kasus i: $\Delta(B) \geq 4$. Jika terdapat satu titik x di B yang mempunyai sedikitnya dua tetangga dalam setiap dua himpunan partit lainnya, maka terdapat satu sisi yang menghubungkan dua titik tetangga dari x tersebut (karena $R \not\supseteq K_{2 \times 2}$). Jadi, $B \supseteq K_{3 \times 1}$, kontradiksi.

Kasus ii: $\Delta(R) \geq 4$. Asumsikan $|N_R(x_1)| \geq 4$, maka x_2 bertetangga dalam B dengan sedikitnya $|N_R(x_1)| - 1$ titik di $N_R(x_1)$, karena bila tidak demikian terdapat $K_{2 \times 2}$ merah. Jika $|N_R(x_1)| \geq 5$, maka x_2 mempunyai derajat paling sedikit 4 di B , sehingga ini adalah Kasus i. Jadi, asumsikan $N_R(x_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $N_B(x_1) = \{v_5, v_6\}$. Karena $\{x_2, x_3, v_5, v_6\}$ tidak membangun $K_{2 \times 2}$ merah, akibatnya $x_2 v_5 \in B$. Maka $d(x_2) \geq 4$ di B , ini juga Kasus (i).

Dengan menggunakan batas bawah oleh Chvátal dan Harary [9] yakni $R(G, H) \geq$

$(c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$, untuk semua $a, c \geq 2$ dan $b, d \geq 1$ diperoleh batas bawah untuk graf multipartit seimbang lengkap, yaitu

$$M_1(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq \max\{(a - 1)(cd - 1), (c - 1)(ab - 1)\} + 1 \quad (\text{I.9})$$

Namun, (I.9) ini tidak berlaku untuk $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$ dengan $j > 1$. Dengan metode probabilistik yang diberikan oleh Erdős dan Spencer (1974), Burger dan Vuuren (2004) dapat menunjukkan batas bawah $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$ sebagai berikut. Untuk $a, c \geq 2$ dan $j, b, d \geq 1$, berlaku

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > \frac{1}{j} \min\{\sqrt[j]{a!(b!)^a 2^{b^2 \binom{b}{2} - 1}}, \sqrt[j]{c!(d!)^c 2^{d^2 \binom{d}{2} - 1}}\}. \quad (\text{I.10})$$

Batas atas untuk bilangan Ramsey multipartit-himpunan kombinasi antara dua graf bipartit seimbang lengkap diberikan (I.11), buktinya dapat ditemukan pada Burger dkk. (2004) dan Stipp (2000). Untuk semua $j, b \geq 1$,

$$M_j(K_{2 \times b}, K_{2 \times b}) \leq \left\lceil \frac{2b - 1}{j} \right\rceil + \left\lceil \frac{2(b - 1) \binom{2b - 1}{b} + 1}{j} \right\rceil. \quad (\text{I.11})$$

Batas atas (I.11) ini hanya dapat digunakan untuk kasus khusus yaitu mencari monokromatik subgraf bipartit seimbang lengkap. Walaupun belum dapat memperumum hasil-hasil untuk kasus graf multipartit lengkap, tetapi Burger dan Vuuren (2004) telah memberikan batas atas rekursif (I.12) berikut, yaitu untuk sebarang $c \geq 2$ dan $j \geq 1$,

$$M_j(G, K_{c \times 2}) \leq 2[M_1(G - v, K_{c \times 2}) - 1] + M_1(G, K_{(c-1) \times 2}) \quad (\text{I.12})$$

dengan $G - v$ adalah sebarang graf terhubung.

I.IV.II Bilangan Ramsey multipartit-ukuran

Selain memperkenalkan konsep bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap, Burger dan Vuuren (2004a) juga mengawali pembahasan bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Kedua konsep tersebut berbeda, namun keduanya saling berhubungan. Pada subbab ini akan diberikan beberapa hasil fundamental tentang bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap yang kecil. Namun sebelumnya, perhatikan definisi umum untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran dari kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berikut.

Definisi I.2 Misalkan j, a, b, c , dan d adalah bilangan-bilangan asli dengan $a, c \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$ didefinisikan jika terdapat bilangan asli terkecil ζ sehingga jika semua sisi dari graf $K_{j \times \zeta}$ diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf $K_{j \times \zeta}$ akan memuat subgraf $K_{a \times b}$ merah atau subgraf $K_{c \times d}$ biru, dan didefinisikan tak hingga dalam keadaan lain.

Bilangan Ramsey multipartit-ukuran dapat juga dipandang sebagai perumuman dari bilangan Ramsey klasik, karena

$$\text{jika } r(m, n) = t \text{ maka } m_t(K_{m \times 1}, K_{n \times 1}) = 1. \quad (\text{I.13})$$

Sifat kesimetrian juga dimiliki oleh bilangan Ramsey multipartit-ukuran, yakni

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = m_j(K_{c \times d}, K_{a \times b}). \quad (\text{I.14})$$

Kaitan lebih lanjut antara bilangan Ramsey multipartit dengan bilangan Ramsey klasik ditunjukkan oleh Burger dan Vuuren (2004a), yaitu sebagai berikut. Misalkan a, b, c , dan d adalah bilangan-bilangan asli dengan $a, c \geq 2$, maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) < \infty \iff j \geq r(a, c). \quad (\text{I.15})$$

Misalkan $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > k$. Ini berarti bahwa terdapat suatu pewarnaan merah-biru pada semua sisi $F \cong K_{k \times j}$ sedemikian sehingga F tidak memuat $K_{a \times b}$ merah dan $K_{c \times d}$ biru sebagai subgraf. Hal ini berakibat bahwa $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > j$. Demikian juga sebaliknya. Jadi, diperoleh

$$m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > j \iff M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > k. \quad (\text{I.16})$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh bahwa:

$$m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq j \iff M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq k. \quad (\text{I.17})$$

Seperti pada bilangan Ramsey multipartit-himpunan, sifat kelinieran juga dimiliki oleh bilangan Ramsey multipartit-ukuran, yakni: jika $a \leq \alpha, b \leq \beta, c \leq \gamma$, dan $d \leq \delta$ maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) \quad (\text{I.18})$$

dan, jika $k \leq j$ maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}). \quad (\text{I.19})$$

Kemudian, Burger dan Vuuren (2004a) juga menunjukkan celah (*gaps*) antara dua bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Untuk semua bilangan asli $n \geq 3, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$ berlaku

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq m_j(K_{(a-1) \times b}, K_{c \times d}) + \lceil d \lfloor j/c \rfloor \rceil - 1. \quad (\text{I.20})$$

Misalkan $k = r(ab, cd)$, maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_k \cong K_{k \times 1}$ akan memuat K_{ab} merah (juga memuat $K_{a \times b}$ merah) atau memuat K_{cd} biru (juga memuat $K_{c \times d}$ biru). Dari (I.19), barisan $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d})$ tidak naik untuk k

naik dengan sebarang nilai dari $a, c \geq 2$ dan $b, d \geq 1$ yang tetap. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = 1$, jika k cukup besar. Oleh karena itu diperoleh bahwa jika $j \rightarrow \infty$ untuk $a, c \geq 2$ dan $b, d \geq 1$, maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \rightarrow 1. \quad (\text{I.21})$$

Akibat (I.21), jika $j \rightarrow \infty$ untuk sebarang $a, c \geq 2$ dan $b, d \geq 1$, maka

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \rightarrow r(a, c). \quad (\text{I.22})$$

Dari teori Ramsey klasik, misalkan $r(a, b) = t$ maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari $K_{t \times 1}$ senantiasa akan memuat $K_{a \times 1}$ merah atau $K_{b \times 1}$ biru sebagai subgraf. Oleh karena itu, $m_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) \leq 1$ untuk semua $j \geq t$. Tetapi, menurut Definisi I.3, $m_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) = 1$ untuk semua $j \geq t$. Jadi, untuk setiap $a, c \geq 2$ dan $j \geq r(a, c)$ berlaku

$$m_j(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) = 1. \quad (\text{I.23})$$

Nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi $K_{2 \times 1}$ dengan sebarang bilangan Ramsey multipartit seimbang lengkap diberikan sebagai berikut. Untuk semua $d \geq 1$ dan $j \geq c \geq 2$ berlaku

$$m_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) = \lceil d/\lfloor j/c \rfloor \rceil. \quad (\text{I.24})$$

Hal ini benar karena $t = \lceil d/\lfloor j/c \rfloor \rceil$ merupakan bilangan terkecil yang memberikan bahwa $K_{j \times t} \supseteq K_{c \times d}$.

Teorema berikut menunjukkan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi dua graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil.

Teorema I.4 [Burger dan Vuuren, 2004a]

- (1) $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$.
- (2) $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$ dan $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.
- (3) $m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.
- (4) $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$ untuk semua $j \geq 7$.

Bukti.

(1) Karena $r(2, 3) = 3 > j$, maka dari (I.15) $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$.

(2) Harborth dan Mengersen (1996) telah memberikan $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4 > 3$, sehingga dari (1.16), $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 2$. Dari Teorema 1.3, $M_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$. Kemudian dari (1.17), $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$. Jadi, $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$. Selanjutnya, karena $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 4$ (Chartrand dan Schuster, 1971) dan dari (3.16),

$m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 1$. Kemudian dari (1.17), karena $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 4$, $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 2$. Jadi, $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.

(3) Karena $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 6$, dari (1.16) dan (1.19) diperoleh $1 < m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.

(4) Karena $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq j$ untuk semua $j \geq 7$ (Chartrand dan Schuster, 1971), menurut (1.17) diperoleh $1 \leq m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 1$ untuk semua $j \geq 7$.

Selanjutnya, karena setiap graf K_{jt} selalu memuat graf $K_{j \times t}$, diperoleh batas bawah berikut. Misalkan $j, b, d \geq 1$ dan $a, c \geq 2$ adalah bilangan-bilangan asli, maka diperoleh batas bawah berikut

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq \min\{\lceil ab/j \rceil, \lceil cd/j \rceil\}. \quad (\text{I.25})$$

Melalui (1.16), dari (1.10) diperoleh batas bawah probabilistik, yaitu untuk setiap $a, c \geq 2$ dan $j, b, d \geq 1$,

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > \frac{1}{j} \min\left\{\sqrt[ab]{a!(b!)^a 2^{b^2 \binom{a}{2} - 1}}, \sqrt[cd]{c!(d!)^c 2^{d^2 \binom{c}{2} - 1}}\right\}. \quad (\text{I.26})$$

Kemudian, Burger dkk. (2004) dan Stipp (2000) membuktikan batas atas bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi graf bipartit seimbang lengkap berikut ini. Untuk semua $j \geq 2$ dan $b \geq 1$,

$$m_j(K_{2 \times b}, K_{2 \times b}) \leq \max\left\{2b - 1, \left\lceil \frac{2(b-1)\binom{2b-1}{b} + 1}{j-1} \right\rceil\right\}. \quad (\text{I.27})$$

Kajian Burger dkk. pada makalah tersebut terbatas pada penentuan bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran *hanya* untuk kombinasi antar graf multipartit seimbang lengkap. Untuk kombinasi graf lainnya, kajian bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran masih merupakan masalah terbuka.

Secara umum, dalam kajian ini, konsep di atas akan diperumum dengan menghilangkan sifat kelengkapan dari graf yang dimuatnya. Misalkan $j \geq 2$ adalah bilangan asli. Untuk graf G_1, G_2, \dots, G_k , bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan semua sisi dari $K_{j \times \zeta}$ dengan k warna akan memuat graf G_i untuk suatu warna ke i . Bilangan Ramsey multipartit ukuran yang telah ditemukan akan diberikan mulai Bab 3.

Bab II Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_s, P_n)$ dengan $2 \leq s \leq 3$

II.I Survey Literatur

Eksistensi dari semua bilangan Ramsey $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$ for $j = 2$ dijamin oleh Erdős dan Rado [13]. Untuk kasus $k = 2$, misalkan G_1 dan G_2 adalah graf multipartit seimbang lengkap, bilangan-bilangannya dapat diturunkan dari hasil Burger dan van Vuuren [4]. Nilai-nilai eksak bilangan Ramsey bipartit $b(P_s, P_t) = m_2(P_s, P_t)$ dari dua lintasan dapat diperoleh dari kasus khusus yang diperoleh Gyárfás dan Lehel [23], dan Faudree dan Schelp [16]. Selanjutnya, Hattingh dan Henning [27] menentukan nilai eksak dari bilang Ramsey bipartit $b(P_m, K_{1,n})$. Dalam kajian ini, kita menentukan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_s, P_t)$ dari dua lintasan dengan $s = 2, 3$.

II.II P_n versus P_s dengan $s = 2, 3$

Teorema berikut menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk lintasan.

Teorema II.1 Untuk $n \geq 6$, $m_j(P_s, P_n) = \lceil \frac{n}{j} \rceil$ dengan $2 \leq s \leq 3$.

Bukti. Misalkan $k = \lceil \frac{n}{j} \rceil$. Jika semua sisi dari $F = K_{j \times (k-1)}$ diwarnai dengan biru maka F tidak memuat P_2 merah (dan P_3) maupun P_n biru untu $n \geq 3$. Oleh karena itu, $m_j(P_s, P_n) \geq k$ untuk $s = 2, 3$ dan $n \geq 3$. Jelas bahwa untuk melihat $m_j(P_2, P_n) \leq k$, dan jadi $m_j(P_2, P_n) = k$. Sekarang, kita buktikan bahwa $m_j(P_3, P_n) \leq k$. Misalkan semua sisi dari $F = K_{j \times k}$ diwarnai dengan merah biru, sedemikian sehingga F tidfak memuat P_3 merah. Untuk menunjukkan bahwa F memuat lintasan biru P_n dengan n titik, perhatikan tiga kasus berikut.

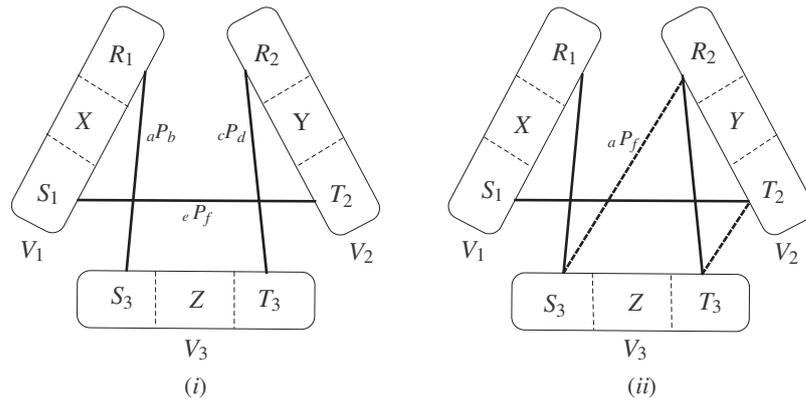
Kasus 1. $j = 2$.

Misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ dan $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ adalah himpunan partit dari F . Jika semua sisi dari F diwarnai biru maka bukti selesai. Sekarang, misalkan F memuat r sisi merah, $r \leq k$. Karena tidak terdapat P_3 merah, semua sisi merah ini adalah independen. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa terdapat r sisi merah yaitu: $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_rb_r$. Jika r adalah ganjil maka $a_1b_2a_3b_4 \dots a_{r-2}b_{r-1}a_{r-1}b_1a_2b_3a_4 \dots b_{r-2}a_{r-1}b_r a_{r+1}b_{r+1}a_{r+2}b_{r+2} \dots a_k b_k$ adalah lintasan biru dengan paling sedikit n titik di F . Sekarang, jika r adalah genap maka dipunyai lintasan biru $a_1b_2a_3b_4 \dots a_{r-3}b_{r-2}a_{r-1}b_r a_{r-2}b_{r-3}a_{r-4} \dots b_3a_2b_1a_r b_{r-1}a_{r+1}b_{r+1} \dots a_k b_k$ dengan paling sedikit n titik di F .

Kasus 2. $j = 3$.

Jika semua sisi di F adalah biru, maka bukti selesai. Misalkan V_1, V_2 dan V_3

adalah himpunan-himpunan partit dari F . Sekarang asumsikan dengan tanpa mengurangi perumuman, berturut-turut terdapat r , s , dan t sisi berwarna merah yang menghubungkan V_1 ke V_2 , V_1 ke V_3 , dan V_2 ke V_3 . Dengan memperhatikan sisi-sisi merah ini, himpunan partisi V_1, V_2 dan V_3 sebagai berikut: $V_1 = R_1 \cup X \cup S_1$, $V_2 = R_2 \cup Y \cup T_2$ dan $V_3 = S_3 \cup Z \cup T_3$, dimana $|R_1| = |R_2| = r$, $|S_1| = |S_3| = s$ dan $|T_2| = |T_3| = t$ sedemikian sehingga semua sisi menghubungkan R_1 ke R_2 , S_1 ke S_3 dan T_2 ke T_3 adalah berwarna merah. Selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, asumsikan $r \leq s \leq t$. Akibatnya $|Z| \leq |Y| \leq |X|$. Amati bahwa terdapat tiga lintasan biru independen, yaitu: (i) lintasan ${}_aP_b$ dengan $2r$ titik yang menghubungkan semua titik R_1 dan beberapa dari S_3 dengan titik awalnya $a \in R_1$ dan titik ujungnya $b \in S_3$, (ii) lintasan ${}_cP_d$ dengan $2r$ titik yang mengubungkan semua titik dari R_2 dan beberapa dari T_3 dengan titik awal $c \in R_2$ dan titik ujungnya adalah $d \in T_3$, (iii) lintasan ${}_eP_f$ dengan $2s$ titik yang menghubungkan semua titik dari S_1 dan beberapa dari T_2 dengan titik awal $e \in T_2$ dan titik ujung $f \in S_1$, terlihat pada Gambar .II.(i). Dengan menghubungkan semua ujung lintasan ini menjadi satu lintasan biru lebih panjang: ${}_aP_f := {}_aP_b c P_d e P_f$. Lintasan ini mempunyai $4r + 2s$ titik, lihat Gambar.II.(ii).

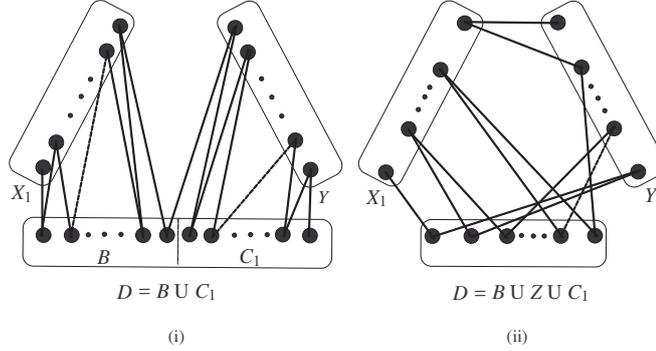


Gambar II.1. Terdapat tiga lintasan biru yang lebih panjang yang diawali dari titik $a \in R_1$ dan diakhiri di titik $f \in S_1$.

Misalkan A, B , dan C adalah berturut-turut sub-sub himpunan T_2, S_3 dan T_3 , yang mana memuat semua titik-titik yang tidak termuat di lintasan biru di atas. Jadi, dipunyai $|Y| + |A| = |X|$ dan $|B| + |Z| + |C| = |X| + |B| = |X| + (s - r)$, dan $(s - r) = |Y| - |Z| \leq |X|$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat lintasan biru yang menghubungkan $X, Y \cup A$ dan $B \cup Z \cup C$ dengan paling sedikit $3|X| + (s - r)$ titik.

Partisi himpunan-himpunan $C = C_1 \cup C_2$ sedemikian sehingga C_2 terdiri dari semua titik-titik ujung dari sisi merah yang menghubungkan A dan C , dan juga $|C_2| = |A| = (t - s)$ dan $|C_1| = |B| = (s - r)$. Partisi himpunan-himpunan $X = X_1 \cup X_2$ sedemikian sehingga $|X_2| = |C_2|$. Jelas bahwa $|X_1| = |Y|$. Misalkan $D = B \cup Z \cup C_1$. Ingat bahwa $|X_2| = |A| = |C_2|$. Misalkan $C_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $X_2 =$

$\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, dan $A = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, dimana $m = t - s$. Akibatnya diperoleh lintasan biru $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 \dots a_m b_m c_m$. Lintasan biru ini mempunyai $3(t-s)$ titik, dan ditulis dengan ${}_a P_{c_m}$. Karena $f a_1$ adalah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan ${}_a P_f$ dan ${}_a P_{c_m}$ diperoleh lintasan biru dengan $4r + 3t - s$ titik. Lintasan yang dihasilkan ini, ditulis dengan ${}_a P_{c_m}$, berawal; dari a dan berakhir pada c_m . Selanjutnya, perhatikan tiga subkasus berikut.



Gambar II.2. (i) Lintasan biru ${}_g P_h$ (ii) Lintasan biru ${}_u P_v$

Subkasus 2.1. $|Z| = 0$.

Karena $|Z| = 0$ maka $|D| = |B \cup C_1| = 2|Y| = 2|X_1| = 2(s - r)$. Akibatnya, diperoleh lintasan biru dengan menghubungkan semua titik di X_1 dengan sebagian titik di D secara bergantian, dan melanjutkan dengan menghubungkan sebagian lain dari titik-titik di D dengan semua titik-titik di Y secara bergantian. Lintasan biru ini dimulai dari $g \in X_1$ dan diakhiri di $h \in C_1$, dan ditulis dengan ${}_g P_h$ (lihat Gambar II. 2.(i)). Lintasan ini mempunyai $4(s - r)$ titik. Karena $c_m g$ adalah sebuah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan biru ${}_a P_{c_m}$ dan ${}_g P_h$ diperoleh lintasan biru dengan $3(s + t)$ titik. Lintasan yang diperoleh ini menggunakan semua titik di F , dan F juga memuat sebuah lintasan biru dengan paling sedikit n titik.

Sukasus 2.2. $0 < |Z| < |Y|$.

Karena $|Z| < |Y|$ maka $|D| = |B \cup Z \cup C_1| < 2|Y|$. Akibatnya, diperoleh lintasan biru ${}_u P_v$ dengan menghubungkan semua titik di X_1 dengan semua titik di Y melalui semua titik-titik di D satu persatu, sampai semua titik-titik di D telah semuanya digunakan. Jika masih terdapat beberapa titik di X_1 (dan juga di Y) maka hubungkan langsung semua titik-titik yang tersisa ini secara bergantian, lihat Gambar.II 2 (ii). Karena $c_m u$ adalah lintasan biru maka dengan menghubungkan dua lintasan ${}_a P_{c_m}$ dan ${}_u P_v$, dipunyai lintasan biru dengan $3(|Y| + r + t)$ titik. Lintasan ini memuat semua titik-titik di F , dan F juga memuat lintasan biru dengan paling sedikit n titik.

Subkasus 2.3. $|Z| = |Y| \neq 0$.

Karena $|Z| = |Y|$, maka $s - r = 0$ dan juga $|D| = |Z|$. Jadi, memuat lintasan biru ${}_w P_z$ dengan menghubungkan semua titik-titik di D , X_1 , dan Y secara bergantian, di-

mana $w \in D$ dan $z \in Y$. Karena $c_m w$ adalah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan ${}_a P_{c_m}$ dan ${}_w P_z$, diperoleh lintasan biru dengan $3(|Y| + r + t)$ titik. Lintasan ini akan memuat semua titik-titik di F .

Kasus 3. $j \geq 4$.

Misalkan V_1, V_2, \dots, V_j adalah himpunan-himpunan partit di F . Secara trivial, jika semua sisi dari F adalah berwarna biru maka bukti selesai. Jika j genap dari Kasus 1, diperoleh $\frac{j}{2}$ lintasan biru menghubungkan semua titik-titik V_1 to V_2, V_3 ke V_4, \dots, V_{j-1} ke V_j . Setiap lintasan mempunyai $2k$ titik. Karena F tidak mempunyai P_3 merah maka kita dapat menjghubungkan $\frac{j}{2}$ lintasan-lintasan ini menjadi satu lintasan biru dengan kj titik. Lintasan terakhir ini akan mempunyai paling sedikit n titik. Jika j ganjil, dari Kasus 1, diperoleh $\frac{j-3}{2}$ lintasan biru yang menghubungkan semua titik V_1 ke V_2, V_3 ke V_4, \dots, V_{j-4} ke V_{j-3} yang independen. Setiap lintasan ini mempunyai $2k$ titik. Dengan menggunakan metode pada Kasus 2, diperoleh lintasan biru yang lain dengan menghubungkan semua titik V_{j-2}, V_{j-1} dan V_j . Juga karena F tidak memuat P_3 , dengan menghubungkan semua lintasan ini menjadi satu lintasan biru, maka diperoleh lintasan biru dengan paling sedikit n titik. \square

Akibat II.1 Untuk $j \geq 2$ dan $n \geq 6$,

$$m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j=2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk yang lainnya,} \end{cases}$$

dimana $s = 2$ atau 3 .

Bukti. Untuk $j = 2$, karena F adalah graf bipartit maka F tidak memuat lingkaran ganjil, $m_2(P_4, C_n) = \infty$ untuk sebarang bilangan ganjil $n \geq 5$. Misalkan ${}_x P_y$ adalah lintasan biru final yang diperoleh dari Teorema II.1. Ini mengakibatkan terdiri dari paling sedikit n titik. Karena xy adalah sisi biru maka dengan menghubungkan titi x dan y , diperoleh lingkaran biru C_n dengan paling sedikit n titik. \square

II.III P_n versus P_4

Hingga kini masih sedikit ditemukan bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G, H)$. Berikut adalah beberapa kajian yang terkait dengan bilangan Ramsey multipartit ukuran. Bilangan $m_2(P_s, P_t)$ dikaji oleh Gyárfás dan Lehel [23] pada tahun 1973 dan Faudree dan Schelp [16] pada tahun 1975. Kemudian, Hattingh dan Henning [27] pada tahun 1998 menentukan nilai eksak untuk $m_2(P_m, S_n)$, dan batas atas bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf lengkap, yaitu $m_2(a, b) \leq m_2(b, a - 1) + m_2(a, b - 1) + 1$ dengan $a, b \geq 2$ [26], dimana $m_2(x, y) = m_2(K_{x,x}, K_{y,y})$. Pada tahun 2002, Longani [31] menemukan nilai eksak dari $m_2(G, G)$ dimana $G \cong K_{2 \times 2}, K_{2,3}$, or S_n dengan $n \geq 1$.

Untuk semua $j \geq 2$, Day *et al.* [11], dan Burger dan van Vuuren [4] menentukan

nilai eksak dari $m_j(K_{2 \times 2}, H)$ dimana $H \cong K_{2 \times 2}$ or $K_{3 \times 1}$. Syafrizal Sy *et al.* [40, 41] menentukan nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$ dimana $s = 2$ atau 3 , dan G adalah suatu lintasan P_n , suatu graf lingkaran C_n , suatu graf roda W_n , suatu graf bintang S_n , atau graf kipas F_n . Pada kajian ini, perhatikan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan versus graf lintasan $m_j(P_4, P_n)$ for $n \geq 2$.

Untuk membuktikan Teorema IV.1, akan digunakan Lema IV.1 berikut.

Lema II.1 *Misalkan $G \cong K_{2 \times n}$ adalah suatu graf bipartit dengan $n \geq 2$. Misalkan $G = G_1 \oplus G_2$ dengan G_1 adalah subgraf yang terdiri dari minimal komponen. Jika G_1 memuat komponen terbesar H dimana $|V(H)| \leq |V(G \setminus H)|$ maka G_2 memuat suatu lintasan dengan $2n$ titik.*

Bukti. Tanpa mengurangi perumuman, cukup membuktikan untuk kasus dimana G_1 terdiri dari tepat tiga komponen, yang mana setiap komponen tersebut adalah graf bipartit lengkap. Misalkan $K_{a_1, b_1}, K_{a_2, b_2}$, dan K_{a_3, b_3} adalah komponen-komponen dari G_1 dengan $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 + b_3$ dan $a_1 + b_1 \leq \sum_{i=2}^3 (a_i + b_i)$. Asumsikan bahwa $a_1 \leq b_1$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $a_1 \leq b_2$.

Akan ditunjukkan bahwa $a_1 + a_3 \geq b_2$. Misalkan $a_1 + a_3 < b_2$. Ingat bahwa karena $a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2$, maka diperoleh $a_2 > b_1$. Akibatnya, diperoleh $a_2 + b_2 > a_1 + b_1$. Ini kontradiksi dengan fakta bahwa K_{a_1, b_1} adalah graf terbesar. Jadi haruslah $a_1 + a_3 \geq b_2$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$. Misalkan bahwa $a_1 + a_3 > b_1 + b_2$. Ingat bahwa G adalah graf bipartit seimbang. Jadi $a_2 < b_3$. Lebih jauh bahwa, asumsikan bahwa $a_1 \leq b_1$, mengakibatkan $a_3 > b_2$. Sebagai akibatnya, diperoleh $a_3 + b_3 > a_2 + b_2$. Ini kontradiksi dengan jumlah titik $|K_{a_i, b_i}|$. Jadi, $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$.

Misalkan $A_i = V_1 \cap V(K_{a_i, b_i})$ dan $B_i = V_2 \cap V(K_{a_i, b_i})$ adalah subhimpunan partit dari G , dengan $i = 1, 2, 3$.

Sekarang, konstruksi suatu lintasan sebagai berikut. Awali dari sebuah titik di A_1 , diperoleh suatu lintasan terpanjang P^1 dengan menggunakan titik di A_1 dan B_2 . Karena $a_1 \leq b_2$, P^1 melewati semua titik di A_1 dan diakhiri dengan titik di B_2 . Perluas P^1 dengan menggunakan sisa titik-titik di B_2 dan titik-titik di A_3 . Karena $a_1 + a_3 \geq b_2$, perluasan ini sebut P^2 , titik ujungnya di A_3 , sesudah melewati semua titik-titik di B_2 . Kemudian, dilanjutkan perluasan lintasan P^2 dengan menggunakan sisa titik di A_3 dan B_1 . Lintasan yang dihasilkan ini sebut P^3 , titik ujungnya di B_1 , karena $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$. Lintasan P^3 dapat diperpanjang menjadi P^4 dengan menggunakan sisa titik di B_1 dan A_2 . Lintasan P^4 titik ujungnya harus di A_2 , karena G adalah graf seimbang. Amati bahwa, pada langkah ini titik-titik

unsaturated adalah sisa dari A_2 dan B_3 . Mengingat kembali G adalah seimbang, P^4 dapat diperluas ke dalam lintasan terakhir melewati semua titik di G .

Kasus 2. $a_1 > b_2$.

Pertama-tama akan ditunjukkan $a_1 \leq b_2 + b_3$. Misalkan $a_1 > b_2 + b_3$, maka diperoleh $a_2 + a_3 < b_1$. Akibatnya, $a_1 + b_1 > (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$. Suatu kontradiksi untuk mengasumsikan $a_1 + b_1 \leq (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$. Oleh karena itu, kita mempunyai $a_1 \leq b_2 + b_3$.

Selanjutnya, kita akan tunjukkan bahwa $a_1 + a_2 \geq b_2 + b_3$. Misalkan bahwa $a_1 + a_2 < b_2 + b_3$, kita peroleh $a_3 > b_1 \geq a_1 > b_2$. Ini mengakibatkan $b_2 + a_2 < a_1 + a_2 < b_2 + b_3 < a_3 + b_3$. Ini kontradiksi dengan jumlah titik $|K_{a_i, b_i}|$. Oleh karena itu, kita harus punya $a_1 + a_2 \geq b_2 + b_3$.

Menggunakan prosedur yang sama Kasus 1, kita dapat mengkonstruksi lintasan biru menggunakan semua titik dari G . Dalam kasus ini lintasannya dengan titik awal di A_1 dan titik akhir di B_1 . \square

Teorema II.2 Untuk bilangan-bilangan bulat $j, n \geq 2$,

$$m_j(P_n, P_4) = \begin{cases} \lceil \frac{4}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 2 \text{ dan } n = 2, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 3, \\ \lceil \frac{n+1}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 3 \text{ dan } n \geq 3. \end{cases}$$

Bukti. Kita perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. $j \geq 2$ dan $n = 2$.

Untuk $2 \leq j \leq 3$, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_4, P_2) \geq 2$. Berikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $G_1 \cong K_{j \times 1}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_2 merah. Karena $j < 4$ maka G_1 tidak memuat P_4 biru. Jadi, $m_j(P_4, P_2) \geq 2$. Untuk menunjukkan bahwa $m_j(P_4, P_2) \leq 2$, perhatikan $F_1 \cong K_{j \times 2}$ dengan $2 \leq j \leq 3$. Misalkan semua sisi dari F_1 diberi pewarnaan merah-biru sebarang sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_2 . Ini mengakibatkan, semua sisi F_1 harus berwarna biru. Karena $2j \geq 4$ untuk $2 \leq j \leq 3$, maka F_1 memuat suatu lintasan biru P_4 . Oleh karena itu, $m_j(P_4, P_2) \leq 2$ untuk $2 \leq j \leq 3$.

Sekarang untuk $j \geq 4$. Jelas bahwa $m_j(P_4, P_2) \geq 1$. Misalkan semua sisi dari $G_1 \cong K_{j \times 1}$ diberi pewarnaan sembarang sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_2 merah. Semua sisi dari G_1 harus biru, Karena G_1 tidak memuat P_2 merah. Karena $j \geq 4$, maka jelas bahwa G_1 memuat P_4 biru. Oleh karena itu, $m_j(P_4, P_2) \leq 1$ untuk $j \geq 4$.

Kasus 2. $j = 2$ dan $n \geq 3$.

Misalkan $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Perhatikan $G_2 \cong K_{2 \times (t-1)}$. Ambil subgraf $2K_{1, t-2}$ di G_2 , dan warnai sisi $2K_{1, t-2}$ dengan warna merah. Sisa sisi dari G_2 diwarnai dengan

biru. Jelas bahwa, G_2 tidak memuat P_4 merah atau P_n biru. Oleh karena itu, $m_2(P_4, P_n) \geq t$.

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_2(P_4, P_n) \leq t$. Perhatikan $F_2 \cong K_{2 \times t}$. Misalkan semua sisi dari F_2 diwarnai sembarang dengan warna merah dan biru sedemikian sehingga F_2 tidak memuat P_4 merah. Jika semua sisi dari F_2 adalah berwarna biru, maka secara trivial F_2 memuat P_n biru dan buktinya lengkap. Oleh karena itu, asumsikan bahwa F_2 memuat paling sedikit satu komponen merah. Karena F_2 tidak memuat P_4 merah maka setiap komponen merah di F_2 akan membentuk graf bintang. Untuk menunjukkan bahwa F_2 memuat P_n biru, perhatikan dua kemungkinan.

Subkasus 2.1 F_2 memuat graf bintang $K_{1,t}$ merah atau graf bintang $2K_{1,t-1}$ merah. Dalam kasus ini, misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ dan $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari F_2 . Tanpa mengurangi perumuman, jika F_2 memuat $K_{1,t}$ merah, misalkan $a_1 \in V_1$ adalah titik pusat dari $K_{1,t}$ maka dipunyai lintasan $P := b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots a_{t-1} b_{t-1} a_t b_t$ in F_2 merah. Kemudian, jika F_2 memuat dua bintang merah $2K_{1,t-1}$, misalkan $a_1 \in V_1$ dan $b_t \in V_2$ adalah titik-titik pusat $2K_{1,t-1}$ maka dipunyai lintasan merah $Q := b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots a_{t-1} b_{t-1} a_t$ di F_2 . Amati bahwa kedua kasus ini, dipunyai lintasan biru P_n dengan paling sedikit n titik di F_2 . Oleh karena itu, $m_j(P_4, P_n) \leq t$.

Subkasus 2.2 F_2 tidak memuat graf bintang merah $K_{1,t}$ ataupun graf bintang merah $2K_{1,t-1}$. Sebagai akibatnya, F_2 komponen merah terbesar dengan paling banyak t titik. Dengan Lema 1, F_2 memuat lintasan biru P_n dengan $n = 2t$ titik. Oleh karena itu, $m_j(P_4, P_n) \leq t$.

Kasus 3. $j \geq 3$ dan $n \geq 3$.

Misalkan $s = \lceil \frac{n+1}{j} \rceil$. Perhatikan $G_3 \cong K_{j \times (s-1)}$. Ambil subgraf $K_{1, (j-1)(s-1)}$ di G_3 , dan warnai semua sisinya dengan warna merah. Semua sisi sisa di G_3 diwarnai dengan warna biru. Jelas bahwa, G_3 tidak memuat path merah P_4 . Karena $j(s-1) - 1 < n$ maka G_3 tidak memuat path biru P_n . Oleh karena itu, $m_j(P_4, P_n) \geq s$.

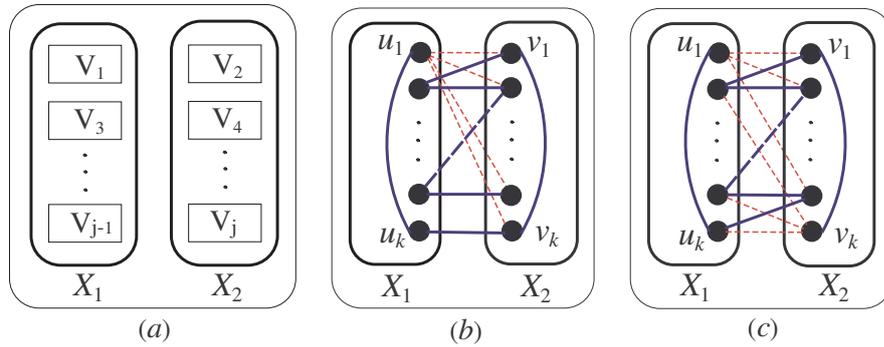
Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_j(P_4, P_n) \leq s$. Perhatikan $F_3 \cong K_{j \times s}$. Misalkan semua sisi dari F_3 diberi warna merah atau biru secara sembarang, sedemikian sehingga F_3 tidak memuat P_4 merah. Jika semua sisi dari F_3 diberi warna biru, maka F_3 trivial memuat P_n biru, jadi buktinya lengkap. Sekarang, asumsikan bahwa F_3 memuat paling sedikit satu komponen merah. Karena F_3 tidak memuat P_4 merah, maka semua komponen merah ini membentuk *stars* atau *cycles* C_3 . Sekarang, misalkan V_1, V_2, \dots, V_j adalah himpunan-himpunan partit dari F_3 . Untuk menunjukkan bahwa F_3 memuat P_n biru, perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 3.1 j genap.

Partisi himpunan-himpunan partit dari F_3 menjadi dua himpunan partit baru, sebut $X_1 = V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{j-1}$ and $X_2 = V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_j$. Selanjutnya, misalkan $X_1 =$

$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ dan $X_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ dengan $k = \frac{j}{2}s$ (Lihat Gambar IV.1.(a)). Misalkan $E' = \{uv \in E(F_3) | u \in X_1 \text{ dan } v \in X_2\}$. Perhatikan $F_3[E'] \subseteq F_3$. Untuk menunjukkan bahwa F_3 memuat P_n biru, cukup tunjukkan bahwa $F_3[E']$ memuat P_n biru. Perhatikan tiga kemungkinan berikut.

i). Jika $F_3[E']$ memuat *star* merah $K_{1,k}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $u_1 \in V_1$ adalah titik pusat $K_{1,k}$ merah di X_1 . Jika $u_1u_k \notin E(F_3)$ maka diperoleh *path* merah $u_1u_kv_kv_1u_2v_2u_3v_3 \dots u_{k-1}v_{k-1}$ dengan $2k$ titik di F_3 . Pada sisi lain, jika $u_1u_k \in E(F_3)$ maka diperoleh *path* biru $v_1u_2v_2u_3v_3 \dots v_{k-1}u_k$ dengan $2k - 1$ titik di F_3 . Oleh karena itu, F_3 memuat *path* biru dengan paling sedikit n titik (see Fig. IV.1.(b)).



Gambar II.3. (a) Partisi baru. (b) $F_3[E'] \supset K_{1,k}$. (c) $F_3[E'] \supset 2K_{1,k-1}$.

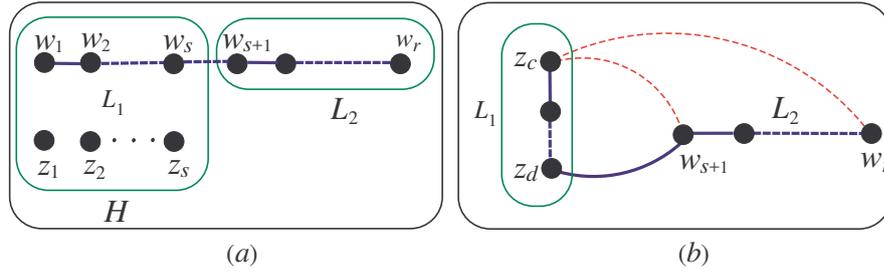
ii). Jika $F_3[E']$ memuat dua *star* merah $2K_{1,k-1}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $u_1 \in V_1$ dan $v_k \in V_j$ adalah titik-titik pusat dari *star* merah $2K_{1,k-1}$. Karena F_3 tidak memuat P_4 merah, maka diperoleh *path* biru $v_kv_1u_2v_2u_3v_3 \dots u_{k-1}v_{k-1}u_ku_1$ dengan $2k$ titik di F_3 , karena $u_1u_k \notin E(F_3)$ dan $v_1v_k \notin E(F_3)$. Jadi, dipunyai *path* biru dengan paling sedikit $n = js - 1$ titik di F_3 (lihat Gambar. IV.1(c)).

iii). Jika $F_3[E']$ tidak memuat $K_{1,k}$ merah maupun $2K_{1,k-1}$ merah, maka $F_3[E']$ memuat komponen terbesar merah dengan paling sedikit s titik. Dari Lema IV.1, $F_3[E']$ memuat *path* merah dengan js titik. Oleh karena itu, F_3 memuat suatu *path* biru dengan $n = js$ titik.

Subkasus 3.2 j is odd.

Dengan menggunakan metode dalam Subkasus 3.1, dipunyai himpunan partit yang baru, sebut $Y_1 = V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{j-2}$ dan $Y_2 = V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_{j-1}$ dengan $|Y_1| = |Y_2| = k$. Misalkan F_3^* adalah subgraf dari F_3 diinduksi oleh Y_1 dan Y_2 . Karena jumlah himpunan partit dalam F_3^* adalah genap, maka dengan menggunakan metode dalam Subkasus 3.1, sehingga diperoleh *path* biru $L = w_1w_2 \dots w_sw_{s+1} \dots w_r$ di F_3^* dengan paling sedikit $r = s(j - 1) - 1$ titik.

Sekarang, misalkan H adalah suatu subgraf F_3 yang diinduksi oleh $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$



Gambar II.4. Illustration of Subcase 3.2.

dan $V_j = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ (lihat Gambar. IV.2(a)). Jika H memuat *star* merah $K_{1,s}$ atau dua *star* merah $2K_{1,s-1}$, maka dengan menggunakan metode dalam Subkasus 2.1, diperoleh *path* merah L_1 dengan paling sedikit $2s - 1$ titik. Misalkan $L_2 = w_{s+1} \dots w_r$. Jika terdapat suatu sisi biru menghubungkan *path* biru L_1 dan *path* biru L_2 , maka F_3 memuat suatu *path* biru dengan paling sedikit $n = js - 2$ titik. Sebaliknya, misalkan $z_c w_{s+1}$ dan $z_c w_r$ adalah sisi-sisi merah. Karena F_3 tidak memuat P_4 merah, maka $z_d w_{s+1}$ adalah suatu sisi biru (lihat Gambar. IV.2(b)). Jadi, F_3 memuat *path* biru dengan paling sedikit $n = js - 2$ titik.

Jika F_3^* tidak memuat *star* merah $K_{1,k}$ maupun dua *star* merah $2K_{1,k-1}$, maka F_3^* memuat komponen terbesar merah dengan paling sedikit s titik. Jadi, dengan Lema IV.1, F_3^* memuat suatu *path* biru dengan paling sedikit js titik. Oleh karena itu, F_3 memuat suatu *path* biru dengan paling sedikit $n = js$ titik. \square

Akibat II.2 Untuk bilangan bulat $j \geq 2$ dan $n \geq 3$,

$$m_j(P_4, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap,} \\ \lceil \frac{n+1}{j} \rceil & \text{untuk } j, n \geq 3. \end{cases}$$

Bukti. Jika $G \cong K_{2 \times t}$, maka G tidak memuat *cycle* ganjil untuk sembarang bilangan asli t . Ini mengakibatkan, $m_2(P_4, C_n) = \infty$ untuk $n \geq 3$ ganjil. Selanjutnya, untuk $n \geq 2$ genap, misalkan ${}_a P_b$ adalah *path* biru yang diperoleh dalam bukti dari Teorema IV.2 dengan ab adalah sisi biru. *Path* biru ini adalah terdiri dari paling sedikit n titik. Karena ab adalah sisi biru, maka dengan menghubungkan a dan b , *cycle* biru C_n dengan paling sedikit n titik. \square

Bab III Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_s, G)$ dengan $2 \leq s \leq 3$ dan G graf lainnya

III.I Survey Literatur

Gyárfás dan Lehel [23] pada tahun 1973, dan Faudree dan Schelp [16] pada tahun 1975, menemukan bilangan Ramsey biipartit ukuran $m_2(P_s, P_t)$. Kemudian, Hattingh dan Henning [27] pada tahun 1998 menemukan nilai eksak $m_2(P_m, S_n)$. Kemudian, pada tahun 2002, Longani [31] menemukan nilai eksak $m_2(G, G)$ dimana $G \cong S_n, K_{2 \times 2}$ atau $K_{2,3}$.

Selanjutnya, pada tahun 2021 untuk semua $j \geq 1$, Day *dkk.* [11], dan pada tahun 2004 Burger *dkk.* [4] menemukan nilai eksak dari $m_j(K_{2 \times 2}, H)$ dimana $H \cong K_{2 \times 2}$ or $K_{3 \times 1}$. Hasil-hasilnya diperlihatkan dalam Tabel 1. Syafrizal Sy 2005 [40] telah membuktikan teorema dan akibat berikut untuk *Ramsey multipartit ukuran* untuk *paths* versus *paths* atau *cycles*.

Teorema III.1 Untuk $j \geq 2$ dan $n \geq 6$, $m_j(P_s, P_n) = \lceil \frac{n}{j} \rceil$ dimana $s = 2, 3$.

Akibat III.1 Untuk $j \geq 2$ dan $n \geq 6$,

$$m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{for } j=2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk yang lainnya,} \end{cases}$$

dimana $s = 2, 3$.

Table 1

Bilangan Ramsey multipartit $m_j(K_{2 \times 2}, H)$ untuk suatu H .

j	$m_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$	$m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$
1	∞^b	∞^b
2	5^a	∞^b
3	3^a	3^b
4	2^a	2^b
5	2^a	2^b
6	2^a	2^b
≥ 7	1^a	1^b

^a Ditemukan Day *dkk.* [11].

^b Ditemukan Burger *dkk.* [4].

Dalam kajian ini, akan ditentukan Bilangan Ramsey multipartit untuk kombinasi lintasan kecil dan suatu graf G , dimana G adalah isomorfik dengan graf roda, graf bintang, graf kipas, dan graf kincir. Akan dibuktikan dengan Lema Bondy untuk graf multipartit seimbang lengkap.

Perhatikan Lema Bondy berikut yang akan digunakan untuk pembuktian berikut.

Lema III.1 Misalkan G adalah suatu graf berorde n . Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ maka G adalah pansiklik atau n adalah genap dan $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

III.II Path versus Graf Lainnya

Pada bagian ini akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit $m_j(P_s, G)$ dimana $s = 2$ atau 3 dan G adalah graf roda W_n , graf bintang S_n , graf kipas F_n , atau graf kincir M_n .

Teorema III.2 Misalkan $G \cong K_{j \times t}$, $j \geq 3$ dan $t \geq 2$. Misalkan M adalah suatu matching di G (tidak harus sempurna). Jika $F \cong G \setminus M$ maka F adalah pansiklik (pancyclic).

Bukti. Misalkan $F \cong K_{j \times t} \setminus M$. Karena $j \geq 3$ dan $t \geq 2$ maka diperoleh $\delta(F) = (j-1)t - 1 \geq \frac{jt}{2}$. Jadi, F adalah pansiklik.

Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$ dan t , jelas bahwa $K_{2 \times t}$ tidak memuat W_n . Oleh karena itu $m_2(G, W_n) = \infty$ untuk sebarang graf G . Akibatnya, $m_2(P_s, W_n) = \infty$ untuk $s = 2$ atau 3 . Teorema berikut menentukan nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$ untuk $j \geq 3$ dan $s = 2$ atau 3 dimana $G \cong W_n, S_n$, atau F_n dengan $n \geq 6$. \square

Teorema III.3 Misalkan G adalah sebuah graf roda W_n , sebuah graf bintang S_n sebuah graf kipas F_n dengan $n \geq 6$. Untuk $j \geq 3$,

$$m_j(P_2, G) = \lceil \frac{n}{j-1} \rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, G) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } G \cong W_n \text{ dengan } n \text{ adalah ganjil,} \\ \frac{n}{j-1} & \text{untuk } j \text{ adalah ganjil, semua } G, \text{ dan } n = (j-1)s \text{ dengan} \\ & \textit{s adalah ganjil,} \\ \lceil \frac{n+1}{j-1} \rceil & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Bukti. Misalkan G adalah sebuah wheel W_n , sebuah star S_n sebuah graf kipas. Untuk menunjukkan bahwa $m_j(P_2, G) \geq \lceil \frac{n}{j-1} \rceil$, perhatikan $H_1 \cong K_{j \times (r-1)}$ dengan $r = \lceil \frac{n}{j-1} \rceil$. Jika semua sisi di H_1 diwarnai biru maka H_1 tidak memuat G biru, karena $(j-1)(\lceil \frac{n}{j-1} \rceil - 1) < n$. H_1 juga tidak memuat P_2 merah. Oleh karena itu $m_j(P_2, G) \geq r$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_2, G) \leq r$. Berikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi di $H \cong K_{j \times r}$ sedemikian sehingga H tidak memuat P_2 merah.

Jadi, semua sisi dari H harus biru. Oleh karena itu, H memuat G biru dengan n vertices. Jadi, $m_j(P_2, G) \leq r$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n .

Dalam menentukan $m_j(P_3, G)$, perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. $j = 3$ dan $G \cong W_n$ dengan n adalah ganjil.

Untuk sebarang bilangan asli t dan $n \geq 6$ ganjil, dipunyai bahwa $K_{3 \times t}$ tidak memuat W_n . Jadi $m_3(G, W_n) = \infty$ untuk sebarang graf G dengan $n \geq 6$ ganjil. Sebagai konsekuensinya, $m_3(P_3, W_n) = \infty$ untuk $n \geq 6$ ganjil.

Kasus 2. j ganjil, semua G , dan $n = (j - 1)s$ dengan s ganjil.

Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_3, G) \geq s$. Misalkan $H_2 \cong K_{j \times (s-1)}$ dengan $s = \frac{n}{j-1}$. Jika semua sisi dari H_2 diwarnai dengan biru maka H_2 tidak memuat G biru, karena $(j-1)(\frac{n}{j-1} - 1) < n$. H_2 juga tidak memuat P_3 merah. Oleh karena itu, $m_j(P_3, G) \geq s$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_3, G) \leq s$. Misalkan $H \cong K_{j \times s}$. Misalkan semua sisi H diberi warna merah-biru secara sebarang sedemikian sehingga H tidak memuat P_3 merah. Jelas bahwa, semua sisi merah di H adalah independen. Karena js adalah ganjil maka terdapat paling sedikit titik $x \in V(H)$ sedemikian sehingga semua sisi yang terkait dengan x adalah biru. Jadi, S_n berwarna biru di H . Selanjutnya, asumsikan $x \in V_1$, dimana V_1 adalah himpunan partit dari H . Selanjutnya, misalkan H^1 adalah suatu subgraf dari H yang diinduksi oleh $V(H) \setminus V_1$. Jadi, $H^1 \cong K_{(j-1) \times s}$. Karena H^1 tidak mempunyai P_3 merah maka dari Teorema 1 H^1 memuat P_n biru. Jadi, H juga memuat F_n biru. Dari Akibat 1, H^1 juga memuat C_n biru. Bersama dengan x , lingkaran biru ini akan membentuk W_n biru di H^1 . Jadi, $m_j(P_3, G) \leq s$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n .

Kasus 3. Untuk nilai lain dari j and n .

Misalkan $t = \lceil \frac{n+1}{j-1} \rceil$. Untuk menunjukkan bahwa $m_j(P_3, G) = t$, perhatikan $H_3 \cong K_{j \times (t-1)}$. Ambil sebarang *perfect matching* M di H_3 , misalkan semua sisi dari M diwarnai dengan merah dan sisi sisa dari H_3 diwarnai dengan biru. Jadi H_3 tidak mempunyai P_3 merah maupun G biru dengan n titik. Jadi $m_j(P_3, G) \geq t$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n .

Selanjutnya, akan ditunjukkan $m_j(P_s, G) \leq t$. Misal semua sisi dari $H \cong K_{j \times t}$ diwarnai secara sebarang dengan warna merah dan biru sedemikian sehingga H tidak memuat P_3 merah. Jelas bahwa, terdapat paling sedikit satu sisi merah, sebut xy di H (karena sisi lainnya adalah biru yaitu G di H). Misalkan x adalah di himpunan partit V_1 dari H . Sekarang, misalkan H^1 adalah subgraf dari H yang diinduksi oleh $V(H) \setminus (V_1 \cup \{y\})$. Jadi, $H^1 \cong K_{(j-1) \times t} \setminus \{y\}$. Untuk menunjukkan bahwa H memuat G biru dengan n titik, perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 3.1. $j = 3$.

Karena $H^1 \cup \{y\}$ tidak memuat P_3 merah, dengan Akibat 1, $H^1 \cup \{y\}$ memuat C_{2t} biru. Bersama dengan x , graf lingkaran ini akan memuat kipas F_n biru. Akibatnya, H juga memuat S_n biru. Jadi $m_3(P_3, G) \leq t$ untuk $G \cong F_n$, atau S_n . Sekarang, untuk menunjukkan bahwa $m_3(P_3, W_n) \leq t$ untuk n genap (Catatan bahwa untuk kasus n ganjil telah ditunjukkan oleh Kasus 1). Ambil sebarang titik z di himpunan partit dari H bahwa tidak memuat x dan y . Karena $H^1 \setminus \{y, z\}$ tidak mempunyai P_3 , dari Akibat 1, $H^1 \setminus \{y, z\}$ memuat C_n biru, karena $n = 2t - 2$ genap. Tentu, H^1 juga memuat C_n lingkaran biru. Bersama dengan x , lingkaran ini akan membentuk W_n di H . Jadi $m_3(P_3, W_n) \leq t$.

Subkasus 3.2. $j \geq 4$.

Sekali lagi bahwa, karena H^1 tidak mempunyai P_3 merah maka semua sisi merah di H^1 (jika ada) akan membentuk (tidak harus *perfect matching*) suatu *matching* M . Dari Teorema III.2, $H^1 \setminus M$ adalah pansiklik. Oleh karena itu, H^1 memuat lingkaran biru C_l untuk setiap $l \in \{6, 7, \dots, (j-1)t-1\}$. Bersama dengan x , lingkaran terbesar di H^1 akan membentuk W_n biru di H . Akibatnya, H juga memuat S_n biru dan F_n biru di H . Jadi $m_j(P_3, G) \leq t$ untuk $G \cong W_n, S_n$, atau F_n . \square

Akibat III.2 Untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 3$,

$$m_j(P_2, M_{2n}) = \lceil \frac{2n}{j-1} \rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, M_{2n}) = \begin{cases} \frac{2n}{j-1} & \text{untuk } j \text{ ganjil dan } 2n = (j-1)s \text{ dengan} \\ & s \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{2n+1}{j-1} \rceil & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Bukti. Karena $M_{2n} \subseteq W_{2n}$, jelas bahwa $m_j(P_s, M_{2n}) \leq m_j(P_s, W_{2n})$. Oleh karena itu, cukup ditunjukkan bahwa $m_j(P_s, M_{2n}) \geq m_j(P_s, W_{2n})$.

Karena H_1, H_2 dan H_3 (dalam bukti dari Teorema 3) tidak memuat P_s ($s = 2$ atau 3) merah maupun W_{2n} biru, dan $M_{2n} \subset W_{2n}$ maka $m_j(P_s, M_{2n}) \geq m_j(P_s, W_{2n})$ untuk semua $n \geq 3$. \square

Bab IV Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_n, C_3)$ dengan $n \geq 2$

IV.I Survey Literatur

Untuk $j \geq 3$ dan $s = 2, 3$, Syafrizal *dkk* [41] menemukan nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$, dimana G adalah *wheel, star, fan*, atau *windmill*.

IV.II Path versus Cycle

Dalam tulisan ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multi partit ukuran $m_j(P_n, C_s)$ dari *path* P_n versus *cycle* C_s dimana $n \geq 2$ dan $s = 3$ atau 4.

Untuk sembarang bilangan bulat positif t , jelas bahwa $K_{2 \times t}$ tidak memuat C_3 . Oleh karena itu, $m_2(G, C_3) = \infty$ untuk sembarang graf G . Sebagai akibatnya adalah, $m_2(P_n, C_3) = \infty$ untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 2$. Teorema berikut memberikan nilai eksak untuk $m_j(P_n, C_3)$ dengan $j \geq 3$ dan $n \geq 2$.

Teorema IV.1 Untuk bilangan bulat $j \geq 3$ dan $n \geq 2$,

$$m_j(P_n, C_3) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n = 2 \text{ or } 3, \\ n - 1 & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap}, \\ n - 2 & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 5 \text{ ganjil}, \\ \lceil \frac{2n}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 4 \text{ genap}, \\ \lceil \frac{2n-1}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 5 \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $j = 3$ dan $n = 2$ or 3.

Jelas bahwa, $m_3(P_2, C_3) \geq 1$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $K_{3 \times 1}$ dengan $F_1 \not\supseteq P_2$. Jadi, $V(F_1)$ adalah himpunan titik independen. Ini mengakibatkan, $F_2 \supseteq C_3$. Oleh karena itu, $m_3(P_2, C_3) \leq 1$.

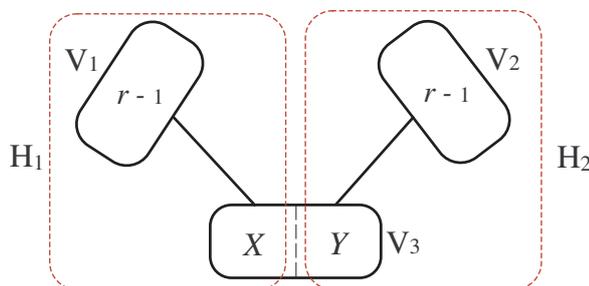
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_3(P_3, C_3) \geq 2$. Perhatikan $G \cong K_{3 \times 1}$. Misalkan $G = G_1 \oplus G_2$ dengan $G_1 \cong K_2 \cup K_1$. Akibatnya, $G_1 \not\supseteq P_3$ dan $G_2 \not\supseteq K_{3 \times 1}$. Jadi, $m_3(P_3, C_3) \geq 2$. Sekarang, akan ditunjukkan $m_3(P_3, C_3) \leq 2$. Perhatikan $F \cong K_{3 \times 2}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F dengan $F_1 \not\supseteq P_3$. Karena $F_1 \not\supseteq P_3$, maka ambil tiga titik dari himpunan partit berbeda, sedemikian sehingga semua titik ini akan membentuk himpunan titik-titik independen di F_1 . Jadi, dipunyai C_3 di F_2 . Oleh karena itu, $m_3(P_3, C_3) \leq 2$.

Kasus 2. ($j = 3$ dan $n \geq 4$) atau ($j \geq 4$).

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah dengan memperhatikan dua subkasus sebagai berikut.

1. Untuk $j = 3$ dan $n \geq 4$.

Misalkan $r = n - 1$ dengan n adalah genap (atau $r = n - 2$ dengan n adalah ganjil). Untuk menunjukkan bahwa $m_3(P_n, C_3) \geq r$, perhatikan bahwa $G \cong K_{3 \times (r-1)}$. Misalkan V_1, V_2 , dan $V_3 = X \cup Y$ adalah himpunan partit dari G dimana $0 \leq |X| - |Y| \leq 1$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah sembarang faktorisasi dari G dengan G_1 adalah graf terdiri dari dua komponen $H_1 \cong K_{|V_1|, |X|}$ dan $H_2 \cong K_{|V_2|, |Y|}$ (lihat Gambar V.1).



Gambar IV.1. Suatu $(P_n, C_3; 3(r-1))$ -good graph menunjukkan $m_3(P_n, K_{3 \times 1}) \geq r$.

Consider

$$\begin{aligned}
 2|X| + 1 &= 2 \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil + 1 \\
 &= 2 \left(\frac{r-1}{2} \right) + 1 \quad (r-1 \text{ adalah bilangan bulat positif}) \\
 &= 2 \left(\frac{(n-1)-1}{2} \right) + 1 \\
 &< n.
 \end{aligned}$$

Akibatnya, $H_1 \not\supseteq P_n$. Karena $|X| \geq |Y|$ maka $H_2 \not\supseteq P_n$. Jadi, $G_1 \not\supseteq P_n$. Pada sisi lain, karena G_2 akan membentuk graf bipartit maka $G_2 \not\supseteq C_3$. Oleh karena itu, $m_3(P_n, C_3) \geq r$.

2. Untuk $j \geq 4$.

Misalkan $r = \lceil \frac{2n}{j} \rceil$ untuk j genap (atau $r = \lceil \frac{2n-1}{j} \rceil$ untuk j ganjil). Untuk menunjukkan $m_j(P_n, C_3) \geq r$, perhatikan $G \cong K_{j \times (r-1)}$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah faktorisasi G dimana G_1 adalah dua komponen, sebut H_1 dan H_2 , sedemikian sehingga H_1 akan membentuk graf multipartit lengkap dengan $\lceil \frac{j(r-1)}{2} \rceil$ titik dan H_2 akan membentuk graf multipartit lengkap dengan $\lfloor \frac{j(r-1)}{2} \rfloor$

titik. Karena $\lceil \frac{j(r-1)}{2} \rceil < n$ maka $G_1 \not\cong P_n$. Pada sisi lain, karena G_2 adalah graf bipartit, maka $G_2 \not\cong C_3$. Oleh karena itu, $m_j(P_n, C_3) \geq r$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_n, C_3) \leq r$. Perhatikan $F \cong K_{j \times r}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_n . Untuk menunjukkan bahwa $F_2 \supseteq C_3$, misalkan P adalah *path* terpanjang di F_1 . Jika $|V(P)| = 1$ maka jelas bahwa $F_2 \supseteq C_3$. Sekarang, misalkan $|V(P)| \neq 1$. Definisikan V_u adalah suatu himpunan partit F yang memuat titik u . Perhatikan dua kemungkinan berikut.

1. Jika F_1 terhubung.

Misalkan $P := {}_a P_b$. Perhatikan $A = V(F) \setminus (V_a \cup V(P))$. Karena $|A| > r$ maka terdapat dua titik, sebut x dan y , di A dengan $V_x \neq V_y$. Karena $V_x \neq V_y$, maka $V_x \neq V_b$ atau $V_y \neq V_b$. Sekarang, perhatikan dua subkasus berikut.

(i). $V_a \neq V_b$.

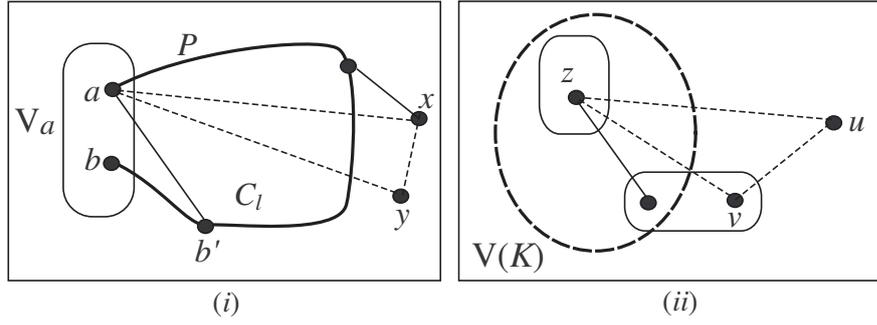
Karena P adalah *path* terpanjang di F_1 dan F_1 adalah graf terhubung, maka $ab \notin E(F_1)$. Karena $V_x \neq V_b$ atau $V_y \neq V_b$ dengan $x, y \notin V_a$, maka diperoleh salah satu $C_3 := abx$ atau $C_3 := aby$ in F_2 .

(ii). $V_a = V_b$.

Misalkan b' adalah titik yang bertetangga ke b di *path* P . Misalkan $ab' \notin E(F_1)$. Jika $b'x \notin E(F_1)$ atau $b'y \notin E(F_1)$, maka F_2 memuat $K_{3 \times 1} := ab'x$ atau $K_{3 \times 1} := ab'y$. Pada sisi lain, jika $b'x \in E(F_1)$ dan $b'y \in E(F_1)$ maka F_1 memuat *path* terpanjang dengan titik-titik ujungnya di dua himpunan partit berbeda. Dari Subkasus (i), F_2 memuat K_3 . Sekarang, misalkan $ab' \in E(F_1)$. Karena $ab' \in E(F_1)$ maka F_1 memuat suatu *cycle* C_l dengan $l = |V(P)| - 1$ titik. Karena F_1 adalah subgraf terhubung maka titik x dan titik y harus terhubung (bertetangga) ke suatu titik di C_l . Jadi, $xy \notin E(F_1)$ (karena P adalah *path* terpanjang di F_1) (lihat Gambar.V.2(i)). Jelas bahwa, karena P *path* terpanjang di F_1 , maka x dan y tidak bertetangga dengan a di F_1 . Ini mengakibatkan, diperoleh $C_3 := axy$ di F_2 .

item Jika F_1 tidak terhubung.

Misalkan K adalah komponen terkecil di F_1 . Jika $|V(K)| = 1$ maka F_2 memuat $K_{3 \times 1}$ (karena $V(F_1)$ terdiri dari himpunan titik-titik yang independen). Selanjutnya, misalkan $|V(K)| \neq 1$. Sekarang, perhatikan posisi titik-titik dari K di F_1 . Misalkan titik-titik dari K adalah termuat di tepat dua himpunan partit di F_1 . Misalkan $B = V(F_1) \setminus V(K)$. Karena K adalah komponen terkecil di F_1 , maka $|B| \geq n$. Ini mengakibatkan, terdapat dua titik, sebut u dan v , di $V(F_1[B])$ sedemikian sehingga $uv \in E(F_2)$ dengan $u \in V_k$ untuk suatu $k \in V(K)$. Karena titik-titik di K dalam dua himpunan partit maka dapat dipilih titik $z \in V(K)$ sedemikian sehingga $zu, zv \notin E(F_1)$ (lihat Gambar.



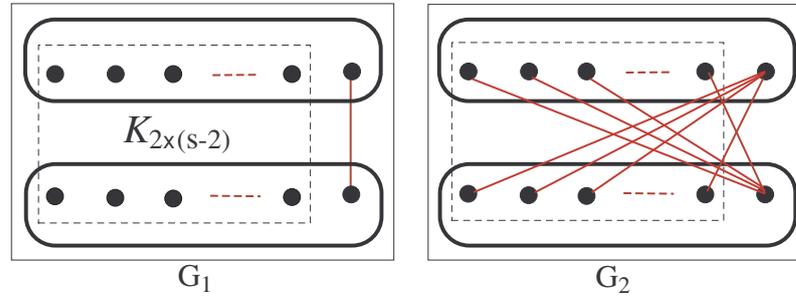
Gambar IV.2. (i) Untuk $V_a = V_b$. (ii) F_1 tidak terhubung.

V.2(ii)). Jadi, F_2 memuat $K_{3 \times 1} := kuv$. Selanjutnya, misalkan titik-titik di K adalah termuat paling sedikit di tiga himpunan partit. Akibatnya, karena $u, v \in V(F_1[B])$ dengan $uv \in E(F_2)$, maka dapat dipilih titik $w \in V(K)$ sedemikian sehingga $wu, vw \notin E(F_1)$. Jadi, F_2 memuat $K_{3 \times 1} := wuv$.

Oleh karena itu, $m_j(P_n, C_3) \leq r$. \square

Teorema IV.2 Untuk bilangan asli $n \geq 4$, $m_2(P_n, C_4) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Bukti. Misalkan $s = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Perhatikan $G \cong K_{2 \times (s-1)}$. Misalkan $G_1 \cong K_{2 \times (s-2)} \cup K_2$ dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G . Karena $2(s-2) < n$ maka $G_1 \not\supseteq P_n$, dan karena $G_2 \cong 2K_{1, (s-2)}$ maka $G_2 \not\supseteq C_4$ (lihat Gambar V.3). Oleh karena itu, $m_2(P_n, C_4) \geq s$.

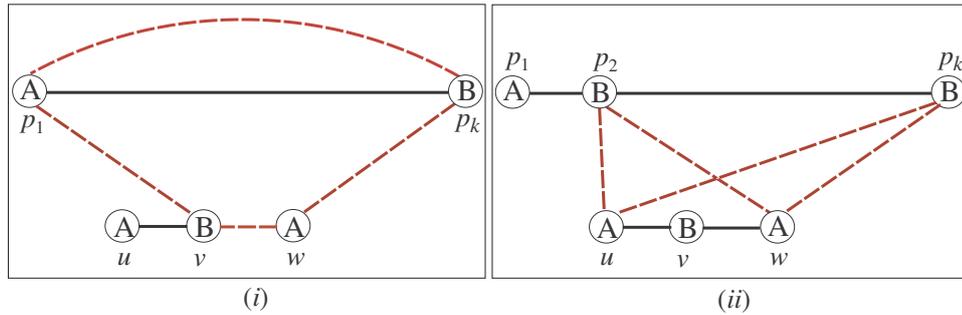


Gambar IV.3. Suatu $(P_n, C_4; |K_{2 \times (s-1)}|)$ -good graph yang menunjukkan $m_2(P_n, C_4) \geq s$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_2(P_n, C_4) \leq s$. Perhatikan bahwa $F \cong K_{2 \times s}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F dan misalkan bahwa P_n adalah bukan subgraf dari F_1 . Misalkan $P := p_1 p_2 \dots p_k$ path terpanjang di F_1 dimana $k \leq n - 1$. Jika $|V(P)| \leq 2$ maka jelas bahwa $F_2 \supseteq C_4$. Sekarang, misalkan $3 \leq |V(P)| \leq (n - 1)$. Perhatikan $X = V(F_1) \setminus V(P)$. Karena $F_1 \not\supseteq P_n$ maka $|X| = 2s - (n - 1) \geq 3$. Karena $|X| \geq 3$ dan F_1 adalah graf bipartit, maka terdapat

paling sedikit dua titik pada satu himpunan partit. Misalkan $a, b \in X$. Jika F_1 memuat suatu *cycle* C_k , maka ambil dua titik, sebut p_i dan p_j , di $(V(C_k) \setminus V_a)$ untuk suatu i . Jadi, F_2 memuat suatu $C_4 := p_i a p_j b p_i$.

Sekarang, asumsikan bahwa F_1 memuat *cycle* C_k . Jadi $p_1 p_k \notin E(F_1)$. Misalkan A dan B adalah himpunan partit dari F . Karena $p_1, p_k \in A$ maka terdapat dua titik $z, v \in (X \cap B)$ sedemikian sehingga F_2 memuat *cycle* $C_4 := p_1 z p_k v p_1$.



Gambar IV.4. Konstruksi graf $K_{2 \times 2}$ di F_2 .

Selanjutnya, jika $p_1 \in A$ dan $p_k \in B$ adalah dua titik ujung di dua himpunan partit berbeda, maka $|X| \geq 4$. Misalkan $u, w \in (X \cap A)$ dan $v \in (X \cap B)$, perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Jika $uv \notin E(F_1)$, maka $C_4 := u v p_1 p_k u$.

Kasus 2. Jika $uv \in E(F_1)$, perhatikan dua kemungkinan berikut (lihat Gambar V.4). Jika $vw \notin E(F_1)$ maka F_2 memuat *cycle* $C_4 := v w p_k p_1 v$ (lihat Gambar V.4(i)). Pada sisi lain, jika $vw \in E(F_1)$ maka F_2 memuat *cycle* $C_4 := u p_2 w p_k u$ in F_2 , karena $p_2 u, p_2 w \notin E(F_1)$ (lihat Gambar V.4(ii)). \square

Bab V Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

$m_j(P_3, K_{s \times 2})$ dengan $j, s \geq 2$

V.I Survey Literatur

Syafrizal *dkk.* telah menentukan $m_j(P_s, n)$ untuk $s = 2, 3, 4$ dan $j, n \geq 3$ ([40],[?]), dan juga, Syafrizal *dkk.* ([41]) menemukan nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$, dimana G adalah *wheel, star, fan*, atau *windmill* untuk suatu $j \geq 3$ dan $s = 2, 3$. Kemudian, Gyárfás *dkk.* [21] menunjukkan bahwa sembarang 2-peawarnaan dari semua sisi graf lengkap tripartit $K_{3 \times n}$ terdapat suatu monokromatik *path* dengan panjang $(1 - o(1))2n$. Selanjutnya, Gyárfás *dkk.* [22] mengkaji bilangan Ramsey multipartit untuk *cycles* ganjil. Akhirnya, Syafrizal ([43]) telah menentukan $m_j(C_3, P_n)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 2$, dan $m_2(C_4, P_n)$ untuk $n \geq 4$.

V.II Path versus Graf *Cocktail Party*

Untuk bilangan asli a, b , dan t dengan $a < b$, $K_{a \times t}$ tidak memuat $K_{b \times t}$. Jadi untuk $s > j$, $m_j(G, K_{s \times t}) = \infty$ dengan sembarang graf G . Akibatnya, $m_j(P_3, K_{s \times t}) = \infty$ untuk $s > j$. Tujuan dalam bab ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk *path* kecil versus graf *cocktail party* $m_j(P_3, K_{s \times t})$ untuk $j, s \geq 2$, $t = 2$, dan $s \leq j$.

Teorema V.1 Untuk bilangan bulat $j, s \geq 2$,

$$m_j(P_3, K_{s \times 2}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \text{ dan } j \geq 4, \\ 2 & \text{untuk } s = \lceil \frac{j}{2} \rceil \text{ dan } j \text{ ganjil}, \\ 3 & \text{untuk } \lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor \text{ dan } j \geq 4. \end{cases}$$

Bukti.

Kasus 1. $2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ dan $j \geq 4$.

Jelas bahwa, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 1$. Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 1$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari K_j dan misalkan bahwa P_3 adalah bukan subgraf dari F_1 . Maka F_1 adalah subgraf dari $\frac{j}{2}K_2$ (jika j genap) atau $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor K_2 \cup K_1$ (jika j ganjil). Jadi F_2 akan memuat $K_{s \times 2}$. Oleh karena itu, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 1$.

Kasus 2. $s = \lceil \frac{j}{2} \rceil$ dan j ganjil.

Pertama akan ditunjukkan $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 2$. Perhatikan $G \cong K_j$. Misal $G_1 \cong \lfloor \frac{j}{2} \rfloor K_2 \cup K_1$ dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G . Ini mengakibatkan G_1 tidak memuat P_3 . Karena $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor < s$, maka G_2 tidak memuat $K_{s \times 2}$. Oleh karena itu, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 2$.

Untuk menunjukkan $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 2$, dilakukan induksi terhadap j . Misalkan

$F \cong K_{j \times 2}$ dan misalkan $F_1 \oplus F_2$ sembarang faktorisasi dari F . Misalkan bahwa $F_1 \not\supset P_3$. Akan ditunjukkan bahwa $F_2 \supset K_{s \times 2}$.

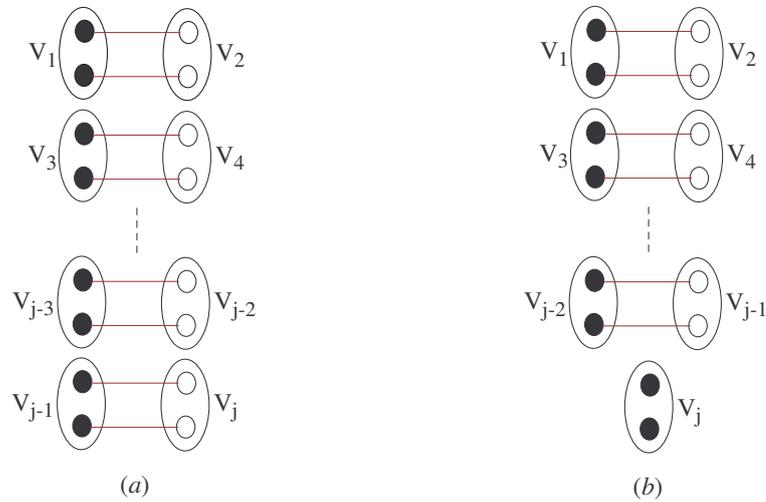
Untuk Kasus $j = 3$, karena $F_1 \not\supset P_3$ maka dua titik dalam satu himpunan partit dari F_1 tidak akan bertetangga ke paling sedikit dua titik lainnya. Jadi, empat titik ini akan membentuk suatu $K_{2 \times 2}$ di F_2 .

Asumsikan benar untuk $j = k - 2$ yaitu $m_{k-2}(P_3, K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}) \leq 2$.

Untuk kasus $j = k$, pilih dua himpunan partit, sebut A dan B , yang mana terdapat sebuah sisi di F_1 yang menghubungkan suatu titik di A ke titik lain di B . Perhatikan suatu faktorisasi dari $F_1 \setminus (A \cup B)$. Dengan asumsi induksi, akan terdapat graf $K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}$ di F_2 . Untuk dua titik bertetangga di $A \cup B$ akan tidak bertetangga ke sembarang titik lain di $K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}$ di F_1 . Jadi, dipunyai $K_{s \times 2} = K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2} + K_{1 \times 2}$ di F_2 , karena $s = \lceil \frac{k-2}{2} \rceil + 1$ untuk k ganjil. Oleh karena itu, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 2$ untuk $s = \lceil \frac{j}{2} \rceil$ dan j ganjil.

Kasus 3. $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$ dan $j \geq 4$.

Akan ditunjukkan bahwa $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 3$. Perhatikan $G \cong K_{j \times 2}$. Misalkan G_1 adalah gra dalam Gambar IV.1 dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G . Jelas bahwa, $G_1 \not\supset P_3$. Karena $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s$, maka G_2 tidak memuat $K_{s \times 2}$. Jadi, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 3$.



Gambar V.1. (a) G_1 untuk j genap (b) G_1 untuk j ganjil.

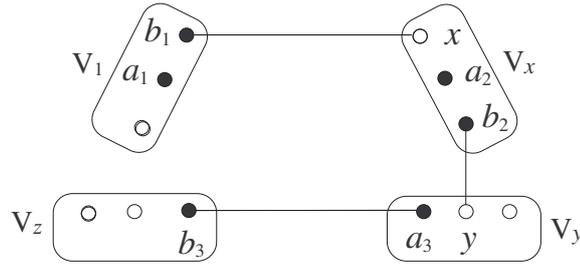
Untuk menunjukkan bahwa $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$, digunakan induksi pada j . Misalkan $F \cong K_{j \times 3}$ dan misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F dan misalkan bahwa $F_1 \not\supset P_3$. Untuk menunjukkan bahwa $F_2 \supset K_{s \times 2}$, perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 3.1. $j \geq 5$ ganjil.

Untuk $j = 5$, karena $|V(F)|$ ganjil maka terdapat titik a_1 dari himpunan partit V_1 di F_1 dengan $d(a_1) = 0$. Lebih lanjut, pilih satu titik $b_1 \in V_1$ di F_1 dengan $d(b_1) = \delta(F_1 \setminus \{a_1\})$. Misalkan N_1 adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke b_1 di F_1 . Perhatikan $X_1 = V(F_1) \setminus (V_1 \cup N_1)$. Jelas bahwa, $|X_1| \geq 11$. Ambil satu titik a_2 dari himpunan partit V_2 di $F_1[X_1]$ dengan $d(a_2) = \delta(F_1[X_1])$ dan pilih titik lain b_2 dari himpunan partit V_2 dengan $d(b_2) = \delta(F_1[X_1] \setminus \{a_2\})$. Misalkan N_2 adalah himpunan titik yang bertetangga dengan a_2 dan b_2 di $F_1[X_1]$. Perhatikan $X_2 = V(F_1[X_1]) \setminus (V_2 \cup N_2)$. Jelas bahwa, $|X_2| \geq 6$. Pilih titik a_3 dari himpunan partit V_3 di $F_1[X_2]$ dengan $d(a_3) = \delta(F_1[X_2])$ dan ambil satu titik lain b_3 dari himpunan partit V_3 dengan $d(b_3) = \delta(F_1[X_2] \setminus \{a_3\})$. Misalkan N_3 adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke a_3 dan b_3 di $F_1[X_2]$. Perhatikan bahwa $X_3 = V(F_1[X_2]) \setminus (V_3 \cup N_3)$. Karena F_1 tidak memuat P_3 maka $|X_3| \geq 2$. Jadi, terdapat paling sedikit dua titik a_4 dan b_4 di $F[X_3]$. Jadi, semua titik ini $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$ dan b_4 akan membentuk $K_{4 \times 2}$ di F_2 . Oleh karena itu, $m_5(P_3, K_{4 \times 2}) \leq 3$.

Asumsikan adalah benar untuk $j = k - 4 \geq 5$ ganjil, bahwa $m_{k-4}(P_3, K_{t \times 2}) \leq 3$ dimana $t = \lceil \frac{k-4}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-4}{4} \rfloor$.

Akan ditunjukkan benar untuk $j = k$ ganjil, yaitu $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$ dengan $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$. Karena $|V(F)|$ adalah ganjil, maka terdapat satu titik a_1 dari himpunan partit V_1 di F_1 dengan $d(a_1) = 0$. Lebih lanjut, pilih titik lain $b_1 \in V_1$. Misalkan x adalah titik yang bertetangga dengan b_1 di F_1 . Karena F_1 tidak memuat P_3 maka terdapat dua titik $a_2, b_2 \in (V_x \setminus \{x\})$. Misalkan y adalah titik yang bertetangga dengan b_2 di F_1 . Ambil satu titik a_3 di V_y . Pilih satu titik $b_3 \in (V_z \setminus (V_1 \cup V_x \cup V_y))$ bertetangga ke a_3 di F_1 . Jelas bahwa, semua titik ini a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 dan b_3 tidak akan bertetangga ke semua titik di $K_{3 \times 2}$ di F_2 .



Gambar V.2. $K_{4 \times 3} \supset K_{3 \times 2}$ di $F_2[V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z]$.

Selanjutnya, perhatikan $A = V(F_1) \setminus (V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z)$. Jika $a_2 u \in E(F_1)$ dimana $u \in (V_1 \cup V_y \cup V_z)$ maka dengan asumsi induksi, $F[A]$ akan memuat $K_{t \times 2}$ di F_2 . Pada kasus lain, jika $a_2 u \in E(F_1)$ dengan $u \notin (V_1 \cup V_y \cup V_z)$ maka kita juga dapat mengkonstruksi $K_{t \times 2}$ dari $F[A] \setminus \{u\}$ sedemikian sehingga terdapat $K_{t \times 2}$ di F_2 . Jelas bahwa, semua titik ini a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 dan b_3 tidak akan bertetangga ke sembarang

titik dari $F_1[A]$. Karena

$$\begin{aligned}
t + 3 &= \left\lceil \frac{k-4}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + 3 \\
&= \left(\left\lceil \frac{k-4}{2} \right\rceil + 2 \right) + \left(\left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + 1 \right) \\
&= \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \right) \\
&= s
\end{aligned}$$

untuk $k \geq 5$ maka, dipunyai $K_{t \times 2} + K_{3 \times 2} = K_{s \times 2}$ di F_2 . Oleh karena itu, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$ untuk $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$ dan $j \geq 5$ ganjil.

Sukasus 3.2. $j \geq 4$ genap.

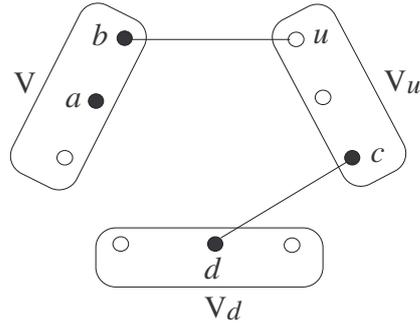
Pertama-tama akan ditunjukkan untuk $j = 4$, misalkan a_1 dan b_1 adalah titik-titik di himpunan partit V_1 di F_1 . Misalkan N_1 adalah himpunan titik yang bertetangga a_1 dan b_1 di F_1 . Perhatikan $X_1 = V(F_1) \setminus (V_1 \cup N_1)$. Karena $|N_1| \leq 2$ maka $|X_1| \geq 7$. Jadi, terdapat himpunan partit V_2 di $F_1[X_1]$ sedemikian sehingga V_2 memuat dua titik, sebut a_2 dan b_2 . Misalkan N_2 adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan a_2 dan b_2 di F_1 . Perhatikan $X_2 = V(F_1[X_1]) \setminus (V_2 \cup N_2)$. Karena F_1 tidak memuat P_3 maka $|X_2| \geq 2$. Akibatnya, terdapat paling sedikit dua titik di $F_1[X_2]$, sebut a_3 dan b_3 . Jadi, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 dan b_3 akan membentuk $K_{3 \times 2}$ di F_2 . Oleh karena itu, $m_4(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 3$.

Asumsi benar untuk $j = k - 3 \geq 4$ genap, yaitu $m_{k-3}(P_3, K_{t \times 2}) \leq 3$ dimana $t = \lceil \frac{k-3}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$.

Akan ditunjukkan bahwa asumsi benar untuk $j = k$ genap, yaitu $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$ dimana $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$. Misalkan a dan b adalah titik-titik di himpunan partit V dan misalkan N adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke a dan b . Misalkan bahwa $u \in N$. Karena F_1 tidak memuat P_3 maka terdapat satu titik $c \in (V_u \setminus N)$ dan pilih titik $d \in V(F_1) \setminus V$ yang mana bertetangga ke c . Jadi, semua titik ini a, b, c, d akan membentuk $H \cong K_{2 \times 2}$ di F_2 .

Lebih lanjut, perhatikan sembarang faktorisasi dari $V(F_1) \setminus (V \cup V_u \cup V_d)$. Dengan asumsi induksi, karena F_1 tidak memuat P_3 maka F_2 akan memuat $K_{t \times 2}$ dimana $t = \lceil \frac{k-3}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$. Jelas bahwa, setiap titik di H akan tidak bertetangga ke sembarang titik $V(F_1) \setminus (V \cup V_u \cup V_d)$. Karena

$$\begin{aligned}
t + 2 &= \left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k-3}{4} \right\rfloor + 2 \\
&= \left(\left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{k-3}{4} \right\rfloor + 1 \right) \\
&= \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \right) \\
&= s
\end{aligned}$$



Gambar V.3. $K_{3 \times 3} \supset K_{2 \times 2}$ di $F_2[V \cup V_u \cup V_d]$.

untuk $k \geq 4$, maka, diperoleh $K_{t \times 2} + K_{2 \times 2} = K_{s \times 2}$ di F_2 . Oleh karena itu, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$ untuk $j \geq 4$ genap. \square

Konjektur 1 Untuk sembarang bilangan asli $j, s \geq 2$, $m_j(P_3, K_{s \times 2}) = 4$ dimana $\lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor < s \leq j$.

V.III Path versus $(P_n, K_{2 \times 2})$

Suatu graf $G \cong K_{j \times t}$ dengan n titik dikatakan $(G_1, G_2; n)$ -good graph jika G tidak memuat G_1 dan \overline{G} tidak memuat G_2 . Syafrizal ([43]) telah menentukan $m_j(P_n, C_3)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 2$, dan $m_2(P_n, C_4)$ untuk $n \geq 4$. kemudian, Syafrizal [44] telah membuktikan teorema berikut.

Teorema V.2 Untuk bilangan bulat $j, s \geq 2$,

$$m_j(P_3, K_{s \times 2}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \text{ dan } j \geq 4, \\ 2 & \text{untuk } s = \lceil \frac{j}{2} \rceil \text{ dan } j \text{ ganjil}, \\ 3 & \text{untuk } \lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor \text{ dan } j \geq 4. \end{cases}$$

Dalam bab ini, kita akan buktikan teorema berikut.

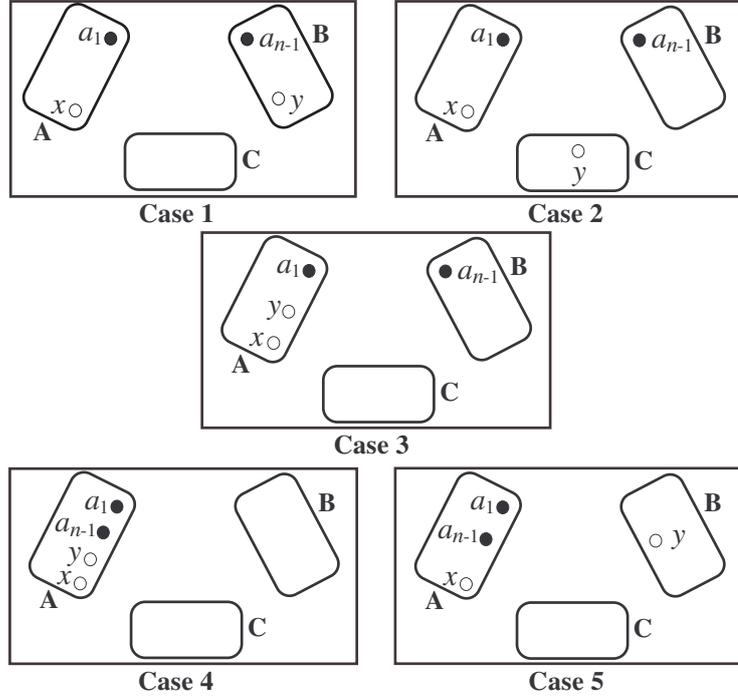
Teorema V.3 Untuk bilangan bulat $n \geq 3$,

$$m_3(P_n, K_{2 \times 2}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } n = 3, \\ 3 & \text{untuk } 4 \leq n \leq 6, \\ \lceil \frac{n+1}{3} \rceil & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Dari Teorema V.2, akan diperoleh $m_3(P_3, K_{2 \times 2}) = 2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $4 \leq n \leq 6$, $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq 3$. Perhatikan $G \cong K_{3 \times 2}$. Misalkan $G_1 \cong 2K_3$ dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G . Jelas bahwa, $G_1 \not\subseteq P_n$. Karena $G_2 \cong C_6$ maka $G_2 \not\subseteq K_{2 \times 2}$. Jadi, $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq 3$. Selanjutnya, untuk $n \geq 7$, misalkan $t = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. Akan dibuktikan bahwa $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq t$.

Perhatikan $H \cong K_{3 \times (t-1)}$. Misalkan $H_1 \cong K_{3 \times (t-1)}$, dan misalkan H_2 adalah komplement dari H_1 relatif terhadap H . Jelas bahwa, $H_2 \not\supseteq K_{2 \times 2}$. Karena $3(t-1) < n$, maka diperoleh $H_1 \not\supseteq P_n$. Oleh karena itu, $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq t$ untuk $n \geq 7$.

Sekarang, akan ditunjukkan batas atas untuk $m_3(P_n, K_{2 \times 2})$ dengan $n \geq 4$. Perhatikan $F \cong K_{3 \times 3}$ untuk $4 \leq n \leq 6$, atau $F \cong K_{3 \times t}$ untuk $n \geq 7$.



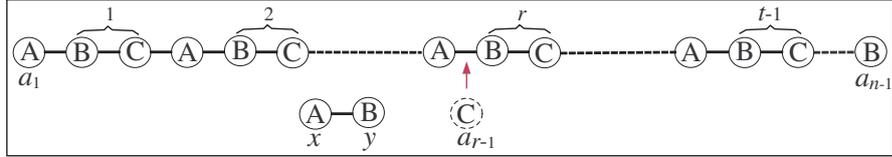
Gambar V.4. Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari P_{n-1} untuk $|X| \leq 1$.

Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F dengan $F_1 \not\supseteq P_n$. Akan ditunjukkan bahwa $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$. Karena $P_{s-1} \subset P_s$ untuk setiap bilangan asli $s \geq 2$ mengakibatkan $m_3(P_{s-1}, K_{2 \times 2}) \leq m_3(P_s, K_{2 \times 2})$, maka akan ditunjukkan batas atas, asumsikan $F_1 \supseteq P_{n-1}$. Jika $F_1 \supseteq C_{n-1}$ maka terdapat suatu $a, b \in (V(F) \setminus V(C_{n-1}))$ sedemikian sehingga $au, av, bu, bv \notin E(F_1)$ untuk suatu $u, v \in (V(C_{n-1}) \setminus (V_a \cup V_b))$. Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := aubva$. Jadi, untuk selanjutnya $F_1 \not\supseteq C_{n-1}$. Misalkan $P_{n-1} := a_1 a_2 \dots a_{n-1}$. Perhatikan $X = V(F) \setminus (V_{a_1} \cup V_{a_{n-1}} \cup V(P_{n-1}))$. Jika $|X| \geq 2$ maka terdapat dua titik c dan d di X sedemikian $ca_1, ca_{n-1}, da_1, da_{n-1} \notin E(F_1)$. Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ca_1 da_{n-1} c$.

Selanjut, perhatikan $|X| \leq 1$. Misalkan $x, y \notin V(P_{n-1})$ dan misalkan A, B , dan C adalah himpunan partit dari F . Definisikan $P_l := (A(i), B(j), C(k))$ adalah suatu *path* dengan l titik terdiri dari i titik di A , j titik di B , dan k titik di C . Jelas bahwa, $l = i + j + k$. Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari P_{n-1} yaitu a_1, a_{n-1}, x , dan y di F_1 (lihat Gambar. V.1).

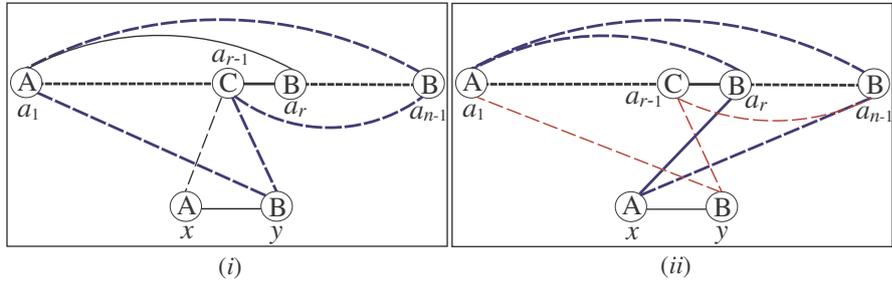
Kasus 1: $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B_{a_{n-1}}(t-1), C(t))$.

Misalkan $x \in A$ dan $y \in B$. If $xy \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xy a_1 a_{n-1} x$. Sekarang, asumsikan $xy \in E(F_1)$. Asumsikan bahwa, untuk setiap $r \in (1, n-1)$, tidak terdapat $a_{r-1} \in C$ dan $a_r \in B$ dengan $a_{r-1}, a_r \in V(P_{n-1})$. Jadi, terdapat $t-1$ komposisi $a_{r-1} \in B$ dan $a_r \in C$. Tetapi, karena $|A| = |B| = |C| = t$, terdapat $a_i \in C$, $i = r-1$, dengan $a_r \in B$. Kasus ini kontradiksi dengan tidak terdapat $a_{r-1} \in C$ dan $a_r \in B$. Jadi, harus ada $r \in (1, n-1)$ sedemikian sehingga $a_{r-1} \in C$ dan $a_r \in B$ (lihat Gambar V.2). Perhatikan dua subkasus berikut.



Gambar V.5. Ilustrasi *path* P_{n-1} untuk Kasus 1.

Subkasus 1.1. Misalkan $a_1 a_r \in E(F_1)$ or $a_{n-1} a_{r-1} \in E(F_1)$. Asumsikan $a_1 a_r \in E(F_1)$. Akibatnya, $a_{r-1} a_{n-1} \notin E(F_1)$ (karena, jika $a_{r-1} a_{n-1} \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq C_{n-1} := a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1} a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1$). Selanjutnya, jika $ya_{r-1} \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_{n+1} := xy a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_r a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1}$. Jadi, haruslah $ya_{r-1} \notin E(F_1)$. Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ya_{r-1} a_{n-1} a_1 y$ (lihat Gambar V.3 (i)).



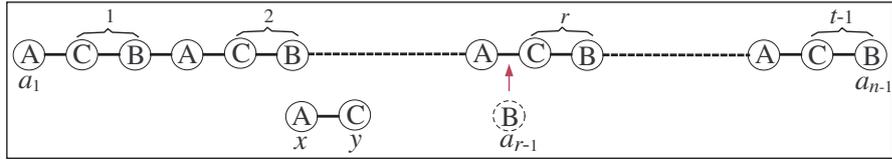
Gambar V.6. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 1.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 1.2.

Subkasus 1.2. Misalkan $a_1 a_r \notin E(F_1)$ dan $a_{n-1} a_{r-1} \notin E(F_1)$. Jika $a_r x \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq a_r x a_{n-1} a_1 a_r$. Sebaliknya, jika $a_r x \in E(F_1)$ maka $a_{r-1} y \notin E(F_1)$ (ini mengakibatkan $F_1 \supseteq P_{n+1} := a_1 \dots a_{r-1} y x a_r \dots a_{n-1}$). Jadi, haruslah $a_{r-1} y \notin E(F_1)$. Ini mengakibatkan, $F_2 \supseteq a_{r-1} y a_1 a_{n-1} a_{r-1}$ (lihat Gambar V.3 (ii)).

Kasus 2: $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B_{a_{n-1}}(t), C(t-1))$.

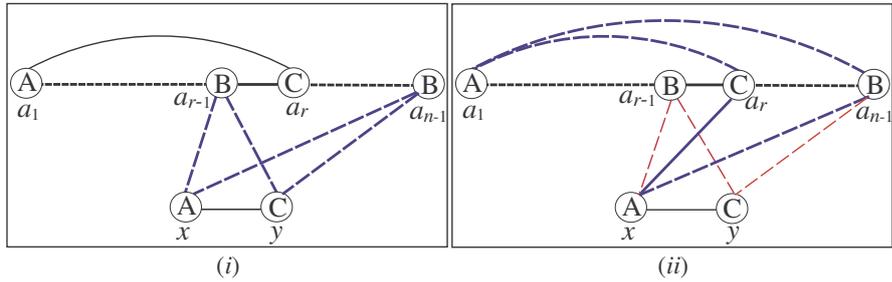
Misalkan $x \in A$ dan $y \in C$. Jika $xy \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xy a_1 a_{n-1} x$. Sebaliknya, jika $xy \in E(F_1)$ maka dengan metode pada Kasus 1, terdapat $r \in (1, n-1)$ sedemikian sehingga $a_{r-1} \in B$ dan $a_r \in C$ (lihat Gambar V.4). Perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 2.1. Jika $a_1 a_r \in E(F_1)$ maka $a_{r-1} x, a_{r-1} y \notin E(F_1)$ (karena, Jika $a_{r-1} x \in$



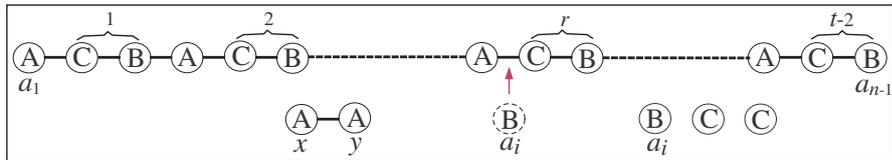
Gambar V.7. Ilustrasi P_{n-1} untuk Kasus 2.

$E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_{n+1} := yx a_{r-1} a_{r-2} a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$. Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$ (lihat Gambar V.5 (i)).



Gambar V.8. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 2.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 2.2.

Subkasus 2.2. Jika $a_1 a_r \notin E(F_1)$ maka $x a_r \in E(F_1)$ (karena, jika $x a_r \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_1 a_r x a_{n-1} a_1$) (lihat Gambar V.5 (ii)). Karena $x a_r \in E(F_1)$, maka diperoleh $a_{r-1} y \notin E(F_1)$ (karena, jika $a_{r-1} y \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_{n+1} := a_1 a_2 \dots a_{r-1} y x a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$) dan $a_{r-1} x \notin E(F_1)$ (karena, jika $a_{r-1} x \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_n := a_1 a_2 \dots a_{r-1} x a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$). Ini mengakibatkan, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$.

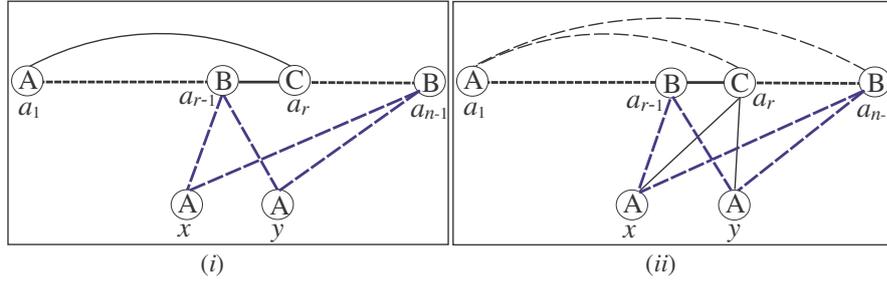


Gambar V.9. Ilustrasi dari $path P_{n-1}$ untuk Kasus 3.

Kasus 3: $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-2), B(t), C(t))$ dengan $a_{n-1} \notin A$. Misalkan $a_{n-1} \in B$, maka perhatikan dua kemungkinan berikut. Dengan metoda dari Kasus 1, terdapat $r \in (2, n-2)$ sedemikian sehingga $a_{r-1} \in B$ dan $a_r \in C$ (lihat Gambar V.6). Perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 3.1. Jika $a_1 a_r \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r-1} \dots a_1 a_r \dots a_{n-1}$. Ak-

ibatnya, a_{r-1} dan a_{n-1} tidak bertetangga x dan y (lihat Gambar V.7 (i)). Jadi, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xa_{r-1}ya_{n-1}x$.



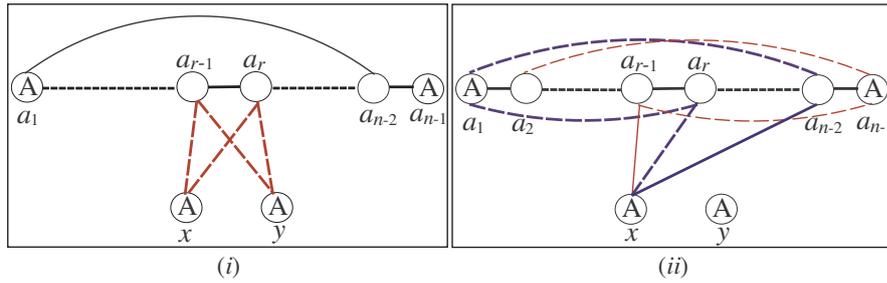
Gambar V.10. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 3.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 3.2.

Subkasus 3.2. Jika $a_1a_r \notin E(F_1)$, maka $xa_r \in E(F_1)$ (karena, jika $xa_r \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xa_1a_{n-1}x$). Selanjutnya, jika $a_{r-1}y \in E(F_1)$ maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_1 \dots a_{r-1}ya_{r-1} \dots a_{n-1}$. Jadi, haruslah $a_{r-1}y \notin E(F_1)$ (lihat Gambar V.7 (ii)). Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xa_{r-1}ya_{n-1}x$.

Kasus 4: $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-2), B(t), C(t))$ dengan $a_{n-1} \in A$.

Misalkan $a_{r-1}, a_r \notin A$ dengan $r \in (1, n-2)$. Perhatikan dua subkasus.

Subkasus 4.1. Misalkan $a_1a_{n-2} \in E(F_1)$ or $a_2a_{n-1} \in E(F_1)$. Asumsi $a_1a_{n-2} \in E(F_1)$, maka $a_{r-1}z, a_rz \notin E(F_1)$ dengan $z \in \{x, y\}$ (karena, jika $a_{r-1}z \in E(F_1)$ atau $a_rz \in E(F_1)$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := za_{r-1}a_{r-2} \dots a_1a_{n-2}a_{n-3} \dots a_r$ atau $F_1 \supseteq P_{n-1} := za_1a_{n-2}a_{n-3} \dots a_r$). Karena $a_{r-1}, a_r \notin A$ dan $x, y, a_{n-1} \in A$, dari Kasus 3, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$). Akibatnya, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_{r-1}xa_rya_{r-1}$ (lihat Gambar V.8 (i)).



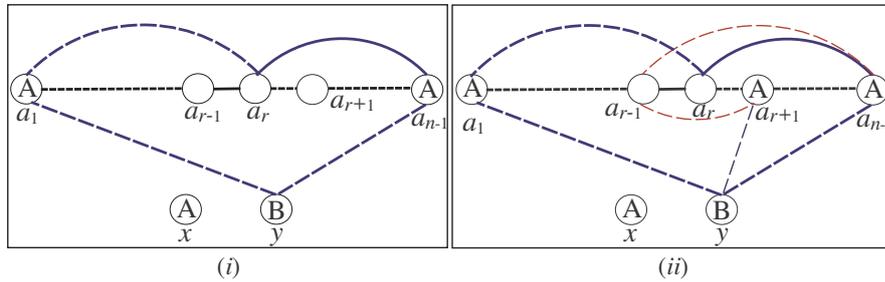
Gambar V.11. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 4.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 4.2.

Subkasus 4.2. Misalkan $a_1a_{n-2} \notin E(F_1)$ dan $a_2a_{n-1} \notin E(F_1)$, lihat Gambar V.8 (ii). Karena $F_1 \not\supseteq P_n$, maka haruslah $a_{r-1}x \notin E(F_1)$ atau $a_rx \notin E(F_1)$, dan $a_{r-1}y \notin E(F_1)$ atau $a_ry \notin E(F_1)$. Jika $a_{r-1}x, a_rx, a_{r-1}y, a_ry \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_{r-1}xa_rya_{r-1}$. Sekarang, asumsikan $a_{r-1}x \in E(F_1)$ maka $xa_r \notin E(F_1)$. Akibatnya, $xa_{n-2} \in E(F_1)$ (karena, jika $xa_{n-2} \notin E(F_1)$, maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_rxa_{n-2}a_1a_r$).

Sebaliknya, jika $xa_{n-2} \in E(F_1)$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_r a_{r+1} \dots a_{n-2} x a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1$. Karena $a_r \notin A$ dan $y, a_1, a_{n-1} \in A$, dari Kasus 3, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ (lihat Gambar. VIII.9 (ii)).

Kasus 5: $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B(t), C(t))$ dengan $a_{n-1} \in A$.

Misalkan $x \in A$ dan $y \in B$, dan perhatikan $a_{r-1}, a_r \notin A$ dengan $r \in (1, n-2)$. Jika $a_1 a_r \in E(F_1)$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$. Akibatnya, jika $a_{r-1} \in B$, maka dengan Kasus 1, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ (karena $x, a_1 \in A$ dan $a_{r-1}, y \in B$) atau, jika $a_{r-1} \in C$ maka dengan Kasus 2, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ (karena $x, a_1 \in A$, $y \in B$, dan $a_{r-1} \in C$). Jadi, haruslah $a_1 a_r \notin E(F_1)$. Dengan argumen ini, juga diperoleh $a_{r-1} a_{n-1} \notin E(F_1)$. Selanjutnya, jika $a_r a_{n-1} \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := y a_1 a_r a_{n-1} y$. Jadi, haruslah $a_r a_{n-1} \in E(F_1)$. Perhatikan dua subkasus berikut..



Gambar V.12. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 5.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 5.2.

Subkasus 5.1. Jika $a_{r+1} \notin A$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r+1} a_{r+2} \dots a_r a_{r-1} \dots a_1$. Akibatnya, dengan argumen yang sama, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ (lihat Gambar V.9 (i)).

Subkasus 5.2. Jika $a_{r+1} \in A$, maka $a_{r-1} a_{r+1} \notin E(F_1)$ (karena, jika $a_{r-1} a_{r+1} \in E(F_1)$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1} a_r$. Dengan argumen yang sama, $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$). Selanjutnya, jika $ya_{r+1} \in E(F_1)$, maka $F_1 \supseteq P_{n-1} := ya_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1} a_r a_{r-1} \dots a_1$. Akibatnya, terdapat $a_i, a_j \in (V(F) \setminus (V_y \cup V_{a_1}))$ sedemikian sehingga $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xa_i ya_j x$, $i, j \in (2, n-2)$. Sebaliknya, jika $ya_{r+1} \notin E(F_1)$ maka $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ya_{r+1} a_{r-1} a_{n-1} y$ (lihat Gambar V.9 (ii)). \square

Bab VI Batas Bawah Bilangan Ramsey

Multipartit Ukuran $m_j(P_n, K_{j \times b})$

VI.I Survey Literatur

Hattingh dan Henning [26] menemukan nilai eksak dari bilangan Ramsey bipartit $b(P_m, K_{1,n})$. Untuk kasus $k = 2$, dengan G_1 dan G_2 adalah graf multipartit lengkap seimbang, bilangan-bilangan asli dapat ditemukan pada hasil yang diperoleh Burger dan van Vuuren [4]. Gyárfás *dkk.* [22] mengkaji bilangan ramsey multipartit untuk *cycles* ganjil. Syafrizal *dkk.* [41] menemukan nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$, dimana G adalah *wheel, star, fan*, atau *windmill* untuk $j \geq 3$ dan $s = 2, 3$. Lebih lanjut, Syafrizal [43] menentukan $m_j(C_3, P_n)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 2$, dan $m_2(C_4, P_n)$ untuk $n \geq 4$. Kemudian, Syafrizal [44] memperoleh $m_j(P_3, K_{s \times 2})$ untuk bilangan asli $j, s \geq 2$. Tujuan pada bab ini adalah untuk mendapatkan batas bawah untuk bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_n, K_{j \times b})$.

VI.II Path versus Graf Multipartit Seimbang Lengkap

Akan dibuktikan teorema berikut.

Teorema VI.1 Untuk bilangan asli $j, n \geq 3$ dan $b \geq 2$,

$$m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq \begin{cases} (n-1)b, & \text{jika } 3 \leq n \leq j, \\ jb, & \text{jika } j < n < jb, \\ (j-1)\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b, & \text{jika } n \geq jb. \end{cases}$$

Bukti.

Perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $3 \leq n \leq j$.

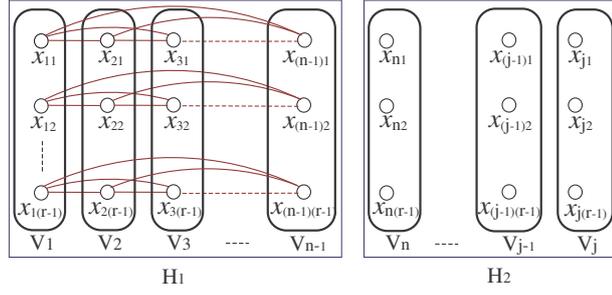
Misalkan $r = (n-1)b$. Perhatikan $K_{j \times (r-1)} = G_1 \oplus G_2$

dimana $G_1 \cong H_1 \cup H_2$ dengan $H_1 \cong (r-1)K_{n-1}$ dan $H_2 \cong (r-1)(j-n+1)K_1$ (lihat Gambar VI.1).

Perhatikan $G_1[H_1]$. Karena $|V(K_{n-1})| < n$, jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_n$. Sekarang, perhatikan $G_2[H_1]$. Jadi, $G_2[H_1] \not\supseteq K_{(n-1) \times b}$ karena $\frac{r-1}{n-1} < b$. Akibatnya, $G_2 \not\supseteq K_{j \times b}$. Oleh karena itu, $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq (n-1)b$.

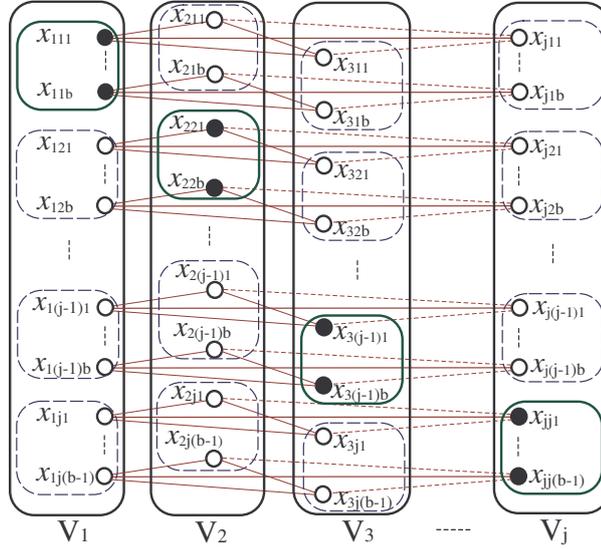
Kasus 2. For $j < n < jb$.

Perhatikan $K_{j \times (jb-1)} = G_1 \oplus G_2$ dengan $G_1 \cong (jb-1)K_j$ (lihat Gambar VI.1).



Gambar VI.1. $m_j(P_n, K_{j \times b}) > r - 1$.

Karena $j < n$, jelas bahwa $G_1 \not\cong P_n$. Untuk setiap $x \in V_i$, $1 \leq i \leq j - 1$, $|N(x)| = j - 1$ di G_1 . Jadi, untuk setiap b titik di V_i mengakibatkan $|N(V_i)| = (j - 1)b$ in G_1 .



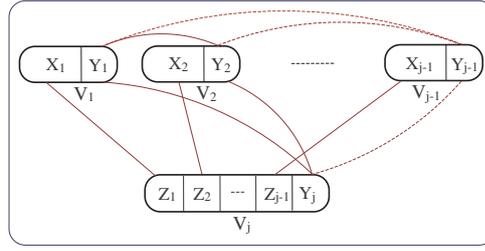
Gambar VI.2. $m_j(P_n, K_{j \times b}) > jb - 1$.

Akibatnya, $|V(G_1) \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} N(V_i))| = b - 1$. Jadi, $G_2 \not\cong K_{j \times b}$. Oleh karena itu, $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq jb$.

Kasus 3. Untuk $n \geq jb$.

Misalkan $t = (j - 1) \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b$. Perhatikan $G \cong K_{j \times (t-1)}$ (lihat Gambar VI.2). Misalkan $V_1 = X_1 \cup Y_1$, $V_2 = X_2 \cup Y_2$, \dots , $V_{j-1} = X_{j-1} \cup Y_{j-1}$, dan $V_j = Z_1 \cup \dots \cup Z_{j-1} \cup Y_j$ adalah himpunan partit dari G dengan $|X_i| = (j - 1) \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$, $|Y_j| = |Y_i| = b - 1$, dan $|Z_i| = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ untuk setiap $i \in \{1, \dots, j - 1\}$.

Misalkan $G_1 \cong (j - 1)K_{|X_i|, |Z_i|} \cup K_{j \times (b-1)}$ adalah subgraf dari G dengan $K_{j \times (b-1)} = G_1[Y_j \cup_{i=1}^{j-1} Y_i]$. Karena $j(b - 1) < n$ dan $2|Z_i| + 1 < n$ untuk setiap i , jelas bahwa



Gambar VI.3. $m_j(P_n, K_{j \times b}) > t - 1$.

$G_1 \not\supseteq P_n$. Selanjutnya, misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G . Karena $K_{|X_i|, |Z_i|}$ adalah graf bipartit lengkap dan $|Y_j| = |Y_i| = b - 1 < b$, jelas bahwa $G_2 \not\supseteq K_{j \times b}$. Oleh karena itu, $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq t$. \square

Khususnya untuk $j = 3$, bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_3(P_n, K_{3 \times 2})$ dengan $3 \leq n \leq 5$, akan diberikan dalam teorema berikut.

Teorema VI.2

$$m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = \begin{cases} 4, & \text{if } n = 3, \\ 6, & \text{if } n = 4 \text{ atau } 5. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan A, B , dan C adalah himpunan-himpunan partit dari $F \cong K_{3 \times 4}$ untuk $n = 3$ (atau $F \cong K_{3 \times 6}$ untuk $n = 4$ atau 5). Kita perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $n = 3$.

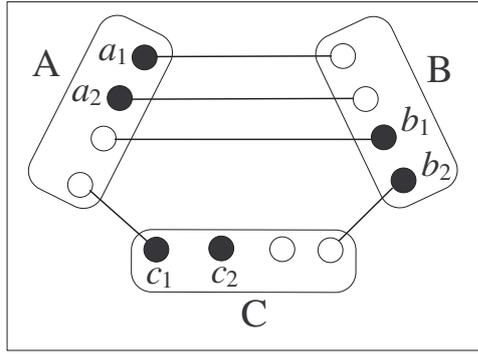
Dari Teorema VI.1, diperoleh $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \geq 4$.

Untuk menunjukkan $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 4$, perhatikan $F \cong K_{3 \times 4}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_3 . Akan ditunjukkan bahwa F_2 memuat $K_{3 \times 2}$. Karena F_1 tidak mempunyai P_3 , maka F_1 harus memuat *matching* dengan paling banyak enam sisi. Asumsikan bahwa jumlah sisi *matching* yang terbanyak di F_1 adalah yang terletak di himpunan A dan B . Sekarang, ambil sembarang dua titik di A , sebut a_1, a_2 , mempunyai tetangga di B . Ambil dua titi di B , sebut b_1 dan b_2 , yang mana tidak bertetangga ke a_1 atau a_2 . Akhirnya, ambil dua titik di C , sebut c_1 dan c_2 (selalu mungkin), yang mana tidak bertetangga ke a_1, a_2, b_1 dan b_2 . Oleh karena itu, himpunan titik-titik ini $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ akan menginduksi suatu $K_{3 \times 2}$ di F_2 , lihat Gambar VI.4. Oleh karena itu, $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 4$.

Kasus 2. Untuk $4 \leq n \leq 5$.

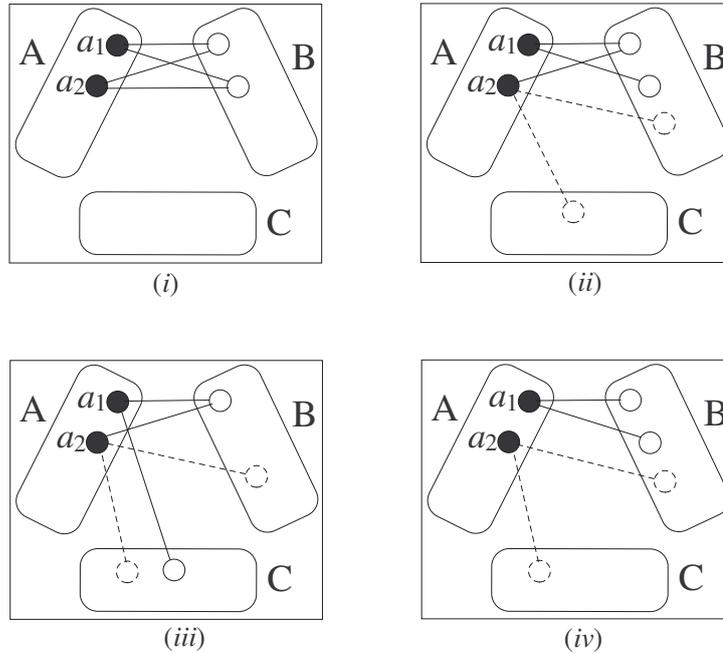
Dari Teorema VI.1, diperoleh $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \geq 6$.

Untuk menunjukkan bahwa $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$, perhatikan $F \cong K_{3 \times 6}$. Misalkan



Gambar VI.4. Ilustrasi untuk Kasus 1. $n = 3$.

$F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F dengan $F_1 \not\subseteq P_n$. Akan tunjukkan bahwa $F_2 \supseteq K_{3 \times 2}$. Misalkan $a_1, a_2 \in A$ dengan $d(a_1) = \delta(F_1)$ dan $d(a_2) = \delta(F_1[A] \setminus \{a_1\})$. Jadi, $\delta(F_1) \leq 2$ karena $F_1 \not\subseteq P_n$. Jadi, $d(a_1) \leq 2$ dan $d(a_2) \leq 2$, lihat Gambar VI.5.



Gambar VI.5. Illustration for Case 2. $n = 4$ or 5 .

Misalkan N_1 adalah himpunan titik yang bertetangga ke a_1 dan a_2 di F_1 . Perhatikan $X = V(F_1) \setminus (A \cup N_1)$. Jadi, $|X| \geq 7$. Karena jumlah titik-titik di setiap himpunan partit adalah lima titik, jelas bahwa terdapat paling sedikit dua titik, sebut titik b_1 dan titik b_2 di B . Selanjutnya, misalkan N_2 adalah himpunan titik yang bertetangga ke b_1 dan b_2 di $F_1[X]$. Akibatnya, terdapat paling sedikit dua titik, sebut titik c_1 dan titik c_2 , di $(C \setminus N_2)$. Semua titik ini yaitu a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 , dan c_2 akan membentuk $K_{3 \times 2}$ in F_2 . Oleh karena itu, $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$. \square

Bab VII Bilangan Ramsey Bipartit Ukuran

$m_2(P_n, T_s)$

VII.I Survey Literatur

Dalam [26], Hattingh dan Henning mengkaji teori Ramsey bipartit. Diberikan dua graf G_1 dan G_2 , bilangan Ramsey bipartit ukuran $m_2(G_1, G_2)$ adalah bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga untuk sembarang pewarnaan dengan warna merah dan biru pada semua sisi dari $K_{2 \times t}$ mengakibatkan G_1 merah atau G_2 biru sebagai subgraf. Ekuivalen dengan, untuk dua graf G_1 dan G_2 , bilangan Ramsey bipartit ukuran $m_2(G_1, G_2)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga sebarang faktorisasi dari graf $K_{2 \times t} := F_1 \oplus F_2$ memenuhi kondisi salah satu dari berikut, yaitu: F_1 memuat G_1 sebagai subgraf atau F_2 memuat G_2 sebagai subgraf.

Masih sedikit hasil yang telah ditemukan untuk bilangan Ramsey bipartit ukuran. Untuk $j = 2$, Gyárfás dan Lehel [23], serta Faudree dan Schelp [16] telah memperoleh nilai eksak $m_2(P_s, P_t)$. Hattingh dan Henning [27] menentukan nilai eksak dari $m_2(P_n, K_{1,s})$.

Untuk semua $j \geq 1$, Day *et al.* [11] dan, Burger dan van Vuuren [4] juga memperoleh nilai eksak dari $m_j(K_{2 \times 2}, H)$ dimana $H \cong K_{2 \times 2}$ atau $K_{3 \times 1}$. Selanjutnya, Syafrizal *dkk.* [40, 41, 42] memperoleh nilai eksak dari $m_j(P_s, G)$ dimana $s = 2, 3$ dan G adalah suatu *path* P_n , suatu *cycle* C_n , suatu *wheel* W_n , suatu *star* S_n atau suatu *fan* F_n .

Syafrizal dan Baskoro [46] mengkaji bilangan Ramsey untuk graf multipartit seimbang, dan menentukan batas bawah untuk bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_n, K_{jxb})$.

Untuk membuktikan hasil utama pada bab ini, digunakan lema berikut.

Lema VII.1 [42] *Misalkan $G \cong K_{2 \times n}$ adalah graf bipartit dengan $n \geq 2$. Misalkan $G = G_1 \oplus G_2$ dengan G_1 terdiri dari paling sedikit tiga komponen. Jika G_1 memuat komponen terbesar H dimana $|H| \leq |G \setminus H|$ maka G_2 memuat suatu path dengan $2n$ titik.*

VII.II Path versus Tree

Tujuan kajian pada bab ini adalah menentukan bilangan Ramsey bipartit untuk kombinasi dari sembarang *path* P_n dan *tree* T_s untuk bilangan-bilangan asli $n, s \geq 2$.

Teorema VII.1 *Untuk bilangan-bilangan asli $n, s \geq 2$,*

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil), \\ s & \text{untuk } (\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s) \text{ atau } (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Bukti. Kita perhatikan tujuh kemungkinan.

Kasus 1.

Hatting dan Henning [27] menemukan nilai eksak bipartit ukuran $m_2(P_n, T_4)$ dengan $n \geq 10$.

Kasus 2. ($n \geq 3, s \leq 3$) atau ($n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$).

Untuk $n \geq 3$ dan $s \leq 3$, diperoleh nilai dari $m_2(P_n, T_s)$ telah ditemukan oleh Syafrizal *dkk.* di [40].

Selanjutnya, untuk $n \geq 9$ dan $4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, perhatikan $F_2 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)}$. Jika semua sisi dari F_2 diberi warna merah, maka F_2 memuat salah satu dari berikut yaitu *path* P_n merah atau *tree* T_s biru, karena $2(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) < n$. Jadi $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Perhatikan bahwa $F \cong K_{2 \times \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Misalkan $F = F_r \oplus F_b$ adalah sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\supseteq T_s$. Jadi, F_r terdiri dari paling sedikit tiga komponen. Selanjutnya, komponen terbesar merah H yaitu F_r yang memenuhi $|H| \leq |F \setminus H|$. Dari Lema 1, F memuat *path* yang melalui semua titik di F_b . Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Kasus 3. ($\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s$) atau ($s = n$ ganjil).

Perhatikan $F_3 \cong K_{2 \times (s-1)}$. Misalkan $F_3 = G_3 \oplus H_3$ dengan $G_3 \cong 2K_{2 \times \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor}$ untuk $n \geq 3$. Karena $2\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor < s$ maka $G_3 \not\supseteq T_s$ dan $H_3 \not\supseteq P_n$. Ini mengakibatkan, $m_2(P_n, T_s) \geq s$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq s$. Perhatikan bahwa $F \cong K_{2 \times s}$. Misalkan $F = F_r \oplus F_b$ adalah sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\supseteq T_s$. Jadi, komponen terbesar di F_r berorder $s - 1$. Jadi, F_r terdiri dari paling sedikit tiga komponen, dan dengan Lema 1, diperoleh *path* biru melalui semua titik di F_b . Karena $|F| = 2s > n$, maka diperoleh *path* biru P_n . Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq s$.

Untuk Kasus 4, Kasus 5, Kasus 6, dan Kasus 7, jika F terdiri dari paling sedikit tiga komponen merah dengan komponen merah terbesar R memenuhi $|R| \leq |F \setminus R|$, maka dengan Lema IX.1, dipunyai *path* P_n . Jadi, cukup perhatikan bahwa F_r terdiri dari hanya dua komponen merah. Karena F_r hanya terdiri dari dua komponen merah, maka boleh diasumsikan bahwa $V(F_r) = R_1 \cup R_2$ dengan $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Kasus 4. $s = n$ genap.

Perhatikan $F_4 \cong K_{2 \times (s-2)}$. Misalkan $F_4 = G_4 \oplus H_4$ dengan $G_4 \cong 2K_{2 \times \frac{s-2}{2}}$. Jadi $G_4 \not\cong T_s$ dan $H_4 \not\cong P_n$. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \geq s - 1$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq s - 1$. Perhatikan $F \cong K_{2 \times (s-1)}$. Misalkan $F = F_r \oplus F_b$ sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\cong T_s$. Jelas bahwa, $|F_r| = |F_b| = s - 1$. Misalkan $x_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$ dan $x_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$. Karena $x = \min\{x_1, x_2\}$ dan $x \geq 2\lceil \frac{s-1}{2} \rceil = s$ maka dapat dikonstruksi suatu *path* biru dengan $2x$ titik. Jadi, F memuat *path* biru dengan s titik. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq s - 1$.

Kasus 5. $s = 2n$.

Misalkan $t = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Perhatikan $F_5 \cong K_{2 \times (t-1)}$. Misalkan $F_5 = G_5 \oplus H_5$ dengan $G_5 \cong K_{2 \times (n-1)} \cup K_{2 \times (t-n)}$. Jadi $G_5 \not\cong T_s$ dan $H_5 \not\cong P_n$. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \geq t$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq t$. Perhatikan $F \cong K_{2 \times t}$. Misalkan bahwa $F = F_r \oplus F_b$ sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\cong T_s$. Misalkan bahwa $y_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$ dan $y_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$. Karena $y = \min\{y_1, y_2\}$ and $y_1 \neq y_2$ then we can construct a blue path on $2y + 1$ vertices. Since $|F_r| \leq s - 1$ then $y \geq t - (n - 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Jadi, F memuat *path* P_n blue dengan paling sedikit n titik. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq t$.

Kasus 6. $n < s$, n genap.

Perhatikan $F_6 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 2)}$. Misalkan $F_6 = G_6 \oplus H_6$ dengan $G_6 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1)} \cup K_{2 \times (\frac{n}{2} - 1)}$. Jadi, F_6 tidak memuat *tree* T_s merah maupun *path* P_n biru. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$. Perhatikan bahwa $F \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1)}$. Misalkan $F = F_r \oplus F_b$ sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\cong T_s$. Misalkan $z_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$ dan $z_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$. Karena $z = \min\{z_1, z_2\}$ dan $z_1 \neq z_2$, maka dapat dikonstruksi suatu *path* biru dengan $2z + 1$ titik. Karena $|F_r| \leq s - 1$ maka $z \geq \frac{n}{2}$. Jadi, F *path* biru P_n dengan paling sedikit n titik. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$.

Kasus 7. $n < s$, n ganjil.

Perhatikan bahwa $F_7 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 3)}$. Misalkan $F_7 = G_7 \oplus H_7$ with $G_7 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1)} \cup K_{2 \times (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2)}$. Jelas bahwa, F_7 tidak memuat *tree* merah T_s maupun P_n . Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. Consider $F \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2)}$. Misalkan $F = F_r \oplus F_b$ adalah sebarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga $F_r \not\cong T_s$. $w_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$ dan $w_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$. Karena

$w = \min\{w_1, w_2\}$ dan $w_1 \neq w_2$, maka dapat dikonstruksi *path* biru P_n dengan $n = 2w + 1$ titik. Karena $|F_r| \leq s - 1$ maka $w \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Jadi, F *path* biru P_n dengan paling sedikit n titik. Oleh karena itu, $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. \square

Bab VIII Bilangan Ramsey Multipartit

Ukuran $m_2(P_4, K_{1,n})$ dengan $2 \leq s \leq 3$

VIII.I Survey Literatur

Eksistensi dari semua bilangan $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$ untuk $j = 2$ dijamin oleh of Erdős dan Rado [13], dan untuk G_1, G_2 graf multipartit seimbang lengkap dan $k = 2$ dijamin oleh Burger dan van Vuuren [4]. Nilai eksak bilangan Ramsey bipartit $b(P_s, P_t) = m_2(P_s, P_t)$ dari dua *path* diperoleh dari kasus khusus yang ditemukan oleh Gyárfás dan Lehel [23], dan Faudree dan Schelp [16]. Selanjutnya, Hattingh dan Henning [27] menentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey bipartit $b(P_m, K_{1,n})$.

Syafrizal Sy [47] telah memperoleh bilangan Ramsey bipartit untuk kombinasi dari sembarang *path* P_n dan *tree* T_s untuk bilangan bulat positif $n, s \geq 2$.

Teorema VIII.1 *For integers $n, s \geq 2$,*

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil), \\ s & \text{untuk } (\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s) \text{ atau } (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil}. \end{cases}$$

VIII.II Path versus Star

Dalam tulisan ini, akan ditentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_s, K_{1,n})$ untuk kombinasi *path* versus *star* dengan $n \geq 2$. Akan dibuktikan teorema berikut.

Teorema VIII.2 *Jika $n \geq 3$ maka $m_2(P_4, K_{1,n}) = n + 1$.*

Bukti. Perhatikan faktorisasi berikut $K_{2 \times n} = F_1 \oplus F_2$ dimana F_1 adalah suatu *matching* lengkap dan F_2 adalah komplemen dari F_1 relatif terhadap $K_{2 \times n}$. Jelas bahwa, $F_1 \not\supset P_4$ dan $F_2 \not\supset K_{1,n}$. Jadi, $m_2(P_4, K_{1,n}) \geq n + 1$.

Sekarang, misalkan $K_{2 \times (n+1)} = F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi $K_{2 \times (n+1)}$ dan misalkan bahwa $F_2 \not\supset K_{1,n}$. Jadi, $\Delta(F_2) \leq n - 1$, dan jadi $\delta(F_1) \geq n + 1 - (n - 1) = 2$. Karena paling sedikit derajat terkecil adalah 2 di F_1 maka terdapat dua titik, sebut x dan y , dari himpunan partit yang sama sedemikian sehingga $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ di F_1 . Ini mengakibatkan bahwa $P_4 \subset F_1$. Oleh karena itu, $m_2(P_4, K_{1,n}) \leq n + 1$. \square

Teorema VIII.3 *Jika $n \geq 2$ maka $m_3(P_s, K_{1,n}) = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ for $s = 3, 4, 5$. Selain itu, Jika $n \neq 8 + 10k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, maka $m_3(P_6, K_{1,n}) = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$.*

Bukti. Misalkan $t = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$. Perhatikan suatu faktorisasi dari $K_{3 \times (t-1)} = F_1 \oplus F_2$ dimana F_1 adalah suatu graf terdiri dari $(t-1)$ titik C_3 yang saling lepas dan F_2 adalah komplemen dari F_1 relatif terhadap $K_{3 \times (t-1)}$. Maka, $F_1 \not\supset P_4$ dan $F_2 \not\supset K_{1,n}$. Jadi, $m_3(P_4, K_{1,n}) \geq t$.

Sekarang, misalkan $K_{3 \times (n+1)} = F_1 \oplus F_2$ adalah suatu faktorisasi dari $K_{3 \times t}$ dan misalkan bahwa $F_2 \not\supset K_{1,n}$. Jadi, $\Delta(F_2) \leq n-1$, dan jadi $\delta(F_1) \geq 2t - (n-1)$. Jika n genap, maka $\delta(F_1) \geq 3$ dan yang lainnya $\delta(F_1) \geq 4$.

Misalkan n adalah genap. Maka derajat minimum dari F_1 is $\delta(F_1) \geq 3$ maka sembarang komponen terhubung dari F_1 harus berderajat $\delta(F_1) \geq 5$. Hanya komponen berorder 5 akan terbentuk dari 1, 2, 2 berturut-turut dari tiga himpunan partit. Jika $n = 8 + 10k$ untuk suatu bilangan asli k , maka F_1 dapat disusun dengan komopen berorder setiap 5, dan jadi $F_1 \supset P_s$, dimana $s=3, 4$ dan 5. Jika $n \neq 8 + 10k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, maka satu dari komponennya akan berorder minimal 6. Jadi, F_1 akan memuat P_s diman $s=3,4,5$ dan 6. Oleh karena itu, $m_3(P_4, K_{1,n}) \leq t$. \square

Bab IX Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(S_m, C_n)$

IX.I Survey Literatur

Tujuan dalam bagian ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(S_m, C_n)$ untuk suatu kombinasi dari suatu *star* dan suatu *cycle*. Suatu *star* S_m adalah graf m titik dengan satu one berderajat $m - 1$, disebut *center*, dan $m - 1$ titik berderajat 1. Suatu *cycle* C_n dengan panjang $n \geq 3$ yaitu suatu graf terhubung 2-regular dengan n titik. Misalkan $K_{j \times t}$ adalah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari j himpunan partit dan t titik [4]. Suatu graf G dengan n titik dikatakan *pancyclic* jika G memuat semua *cycles* dengan setiap panjangnya adalah l , $3 \leq l \leq n$.

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik adalah $V(G)$ dan himpunan sisi adalah $E(G)$. *Lingkungan* $N(v)$ dari suatu titik v adalah himpunan titik yang bertetangga ke v di G . Banyaknya titik yang bertetangga dengan x didefinisikan sebagai $d(x) = |N(x)|$. *Derajat minimum* ditulis dengan $\delta(G)$ dan *derajat maksimum* ditulis dengan $\Delta(G)$. Graf G dikatakan *r-regular* jika $d(x) = r$ untuk semua $x \in V(G)$. Definisikan $V_u(G)$ untuk suatu himpunan partit G yang memuat titik u .

Untuk menunjukkan hasil utama pada bagian ini, akan digunakan lema Bondy [6] dan teorema berikut.

Lema IX.1 *Misalkan G adalah suatu graf berorder n . Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka akan memenuhi salah satu dari berikut, yaitu: G adalah pancyclic atau $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ dengan n genap.*

Berikut diberikan Teorema Moo dan Moser [33] untuk digunakan dalam pembuktian teorema selanjutnya.

Teorema IX.1 *Jika G adalah graf bipartit seimbang $2n$ titik, dengan derajat minimum $\delta(G) \geq \frac{n+1}{2}$, maka G adalah hamiltonian.*

IX.II Star versus Cycle

Syafrizal dkk [40] telah memperlihatkan bahwa bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_m, C_n)$ untuk kombinasi *paths* dan *cycles*, untuk kasus $m = 2$ dan 3. Pada bagian ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk *star* S_m dan *cycle* C_n untuk $m, n \geq 3$. Dalam Teorema XI.2, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran S_m untuk $m = 3, 4$ dan *cycle* C_n untuk $n \geq 3$, dan pada Teorema 3 akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran S_m untuk $m \geq 4$ dan *cycle* C_n untuk $n \geq 5$.

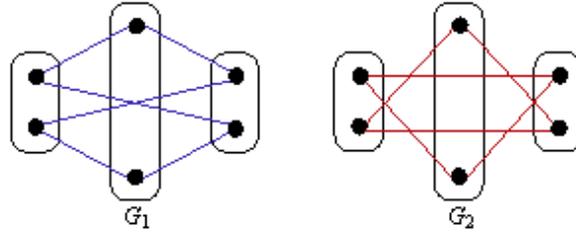
Teorema IX.2 Untuk bilangan asli $j, n \geq 3$ dan $m = 3, 4$

$$m_j(S_m, C_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j = 3, m = 4, \text{ dan } n = 6, \\ 2 & \text{untuk } j = 5, m = 4, \text{ dan } n = 3, 4, \\ 1 & \text{untuk } (5 \leq n \leq j \text{ dan } m = 3), \text{ atau} \\ & \text{untuk } (j = 6, n = 4, 6 \text{ dan } m = 4), \text{ atau} \\ & \text{untuk } (5 \leq n \leq j, j \geq 7 \text{ dan } m = 4). \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan tiga kemungkinan berikut.

Kasus 1. $j = 3, m = 4,$ dan $n = 6.$

Pertama akan ditunjukkan $m_3(S_4, C_6) \geq 3.$ Misalkan $G_1 \cong C_6$ dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap $K_{3 \times 2}.$ Ini mengakibatkan, $G_1 \not\supseteq S_4$ dan $G_2 \not\supseteq C_6,$ lihat Gambar XI.1. Jadi, $m_3(S_4, C_6) \geq 3.$



Gambar IX.1. $G_1 \not\supseteq S_4$ and $G_2 \not\supseteq C_6.$

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_3(S_4, C_6) \leq 3.$ Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $F \cong K_{3 \times 3}$ dan misalkan bahwa $F_1 \not\supseteq S_4.$ Maka, $\Delta(F_1) \leq 2,$ jadi $\delta(F_2) \geq 4.$ Jika $\Delta(F_1) \leq 1$ maka, menurut Lema XI.1, F_2 adalah *pancyclic* dan mengakibatkan $F_2 \supseteq C_6.$ Sekarang, tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa $d(x) = 2$ untuk setiap $x \in V(F_1),$ maka F_1 adalah suatu graf *2-regular* dan F_2 adalah suatu graf *4-regular.* Jika F_1 terhubung maka F_1 adalah suatu *cycle* $C_9.$ Pada sisi lain, F_1 adalah isomorfik ke satu dari berikut yaitu $\{C_3 \cup C_6, C_4 \cup C_5, 3C_3\}.$ Jika F_1 tidak mempunyai *path* P_3 dengan titik ujungnya pada himpunan partit yang sama, maka F_2 memuat suatu subgraf bipartit G yang diinduksi oleh enam titik dalam sembarang dua himpunan partit, dimana $\delta(G) \geq 2.$ Dari Teorema XI.1, $F_2 \supseteq C_6.$ Pada sisi lain (jika F memuat P_3), maka dapat dikonstruksi suatu graf bipartit G di $F_2,$ sebagai berikut. Misalkan A adalah himpunan tiga titik di *path* P_3 ini. Ambil B sebagai himpunan partit di F_2 yang tidak memuat *path* P_3 tersebut. Akibatnya, terdapat suatu subgraf bipartit yang diinduksi G di F_2 oleh $A \cup B,$ dimana $\delta(G) \geq 2.$ Dari Teorema XI.1, $F_2 \supseteq C_6.$

Kasus 2. $j = 5, m = 4$ dan $n = 3, 4.$

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $m_5(S_4, C_n) \geq 2.$ Misalkan $G_1 \cong C_5$ dan

misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap $K_5 = K_{5 \times 1}$, sehingga $G_2 \cong C_5$. Maka, $K_5 = G_1 \oplus G_2$ adalah suatu faktorisasi sedemikian sehingga $G_1 \not\supseteq S_4$ dan $G_2 \not\supseteq C_n$ untuk $n = 3$ dan 4 . Oleh karena itu, $m_5(S_4, C_n) \geq 2$ untuk $n = 3$ dan 4 .

Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $F \cong K_{5 \times 2}$. Akan ditunjukkan bahwa $S_4 \subseteq F_1$ atau $C_n \subseteq F_2$ untuk $n = 3$ dan 4 . Misalkan bahwa $S_4 \not\subseteq F_1$. Akibatnya, $\Delta(F_1) \leq 2$, sehingga $\delta(F_2) \geq 6$. Karena $\delta(F_2) \geq 5$, maka dari Lema XXI., F_2 adalah *pancyclic* dan sedemikian sehingga $F_2 \supseteq C_n$ untuk $n = 3$ dan 4 . Oleh karena itu, $m_5(S_4, C_n) \leq 2$ untuk $n < 5$.

Kasus 3. ($5 \leq n \leq j$ dan $m = 3$) atau ($j = 6, m = 4$, dan $n = 4, 6$) atau ($5 \leq n \leq j, j \geq 7$ dan $m = 4$).

Jelas bahwa, $m_j(S_m, C_n) \geq 1$. Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) \leq 1$. Misalkan $K_{j \times 1} \cong K_j := F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari K_j dan, misalkan bahwa $F_1 \not\supseteq S_m$ untuk $m = 3, 4$. Akibatnya, $\Delta(F_1) \leq 2$, sehingga $\delta(F_2) \geq (j - 1) - \Delta(F_1)$. Pandang tiga subkasus berikut.

Subkasus 3.1. Untuk ($5 \leq n \leq j$ dan $m = 3$).

Karena $F_1 \not\supseteq S_3$ atau F_1 adalah suatu *matching* (tidak perlu maksimal), maka $\Delta(F_1) \leq 1$. Sehingga, $\delta(F_2) \geq j - 2 \geq \frac{n}{2}$. Jadi, dari Lema XI.1, F_2 adalah *pancyclic*. Oleh karena itu, $F_2 \supseteq C_n$. Jadi, $m_j(S_3, C_n) \leq 1$ untuk $5 \leq n \leq j$.

Subkasus 3.2. Untuk ($j = 6, m = 4$ dan $n = 4, 6$).

Karena $j = 6$ maka $\delta(F_2) = 3$, yaitu $\delta(F_2) \geq \frac{j}{2} = 3$. Jadi, dari Lema XI.1 F_2 adalah suatu *pancyclic*. Akibatnya, $F_2 \supseteq C_4$ dan C_6 . Oleh karena itu, $m_6(S_4, C_n) \leq 1$ untuk $n = 4, 6$.

Subkasus 3.3. Untuk ($5 \leq n \leq j, j \geq 7$ dan $m = 4$).

Karena $j \geq 7$, maka $\delta(F_2) \geq j - 3 \geq \frac{j}{2}$. Jadi, dengan Lema XI.1, F_2 adalah *pancyclic*. Jadi, $F_2 \supseteq C_n$ untuk $3 \leq n \leq j$. Oleh karena itu, $m_j(S_4, C_n) \leq 1$ dimana $5 \leq n \leq j$ dengan $j \geq 7$. \square

Teorema IX.3 Untuk bilangan asli j dan n dimana $3 \leq j < n$,

$$m_j(S_m, C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk } 4 \leq m \leq \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2, \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil + 1 & \text{untuk } n \text{ ganjil dan satu dari} \\ & [m = \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2, j \text{ genap}] \text{ atau} \\ & [m = \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{j} \rceil (j - 1) + 2, j \text{ ganjil}]. \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $4 \leq m \leq \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2$.

Misalkan $r = \lceil \frac{n}{j} \rceil$. Akan ditunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) \geq r$. Misalkan $G_1 \cong (r - 1)C_j$ dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap $K_{j \times (r-1)}$.

Jadi, $\Delta(G_1) = 2$, sedemikian sehingga $G_1 \not\subseteq S_m$, untuk $m \geq 4$. Karena $|V(G_2)| = j(r-1) < n$ maka $G_2 \not\subseteq C_n$.

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) \leq r$. Misalkan $K_{j \times r} := F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $K_{j \times r}$ dan misalkan bahwa S_m adalah bukan subgraf dari F_1 . Akibatnya $\Delta(F_1) \leq m-2 \leq r(\frac{j}{2}-1)$. Jadi, $\delta(F_2) \geq (j-1)r - r(\frac{j}{2}-1) = \frac{jr}{2}$. Karena $\delta(F_2) \geq \frac{jr}{2}$, dari Lema XI.1, $F_2 \supseteq C_n$ dimana $n \leq jr$. Jadi $m_j(S_m, C_n) \leq r$ untuk semua $3 \leq n \leq jr$.

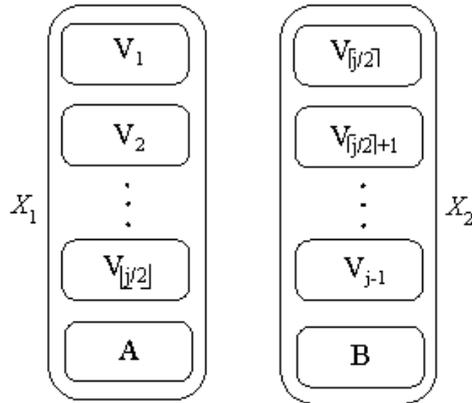
Kasus 2. n ganjil.

Misalkan $t = \lceil \frac{n}{j} \rceil + 1$. Untuk menunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) = t$, perhatikan dua kemungkinan dari j .

Subkasus 2.1. $m = (\frac{j}{2}-1)(t-1) + 2$ dan j genap.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) \geq t$. Misalkan $G_1 \cong 2K_{\frac{j}{2} \times (t-1)}$, dan misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap $K_{j \times (t-1)}$. Jadi, $\Delta(G_1) = (t-1)(\frac{j}{2}-1)$. Karena $\Delta(G_1) = (t-1)(\frac{j}{2}-1) < m-1$ maka $G_1 \not\subseteq S_m$. Selanjutnya, karena G_2 adalah graf bipartit, maka $G_2 \not\subseteq C_n$ untuk n ganjil. Oleh karena itu, $m_j(S_m, C_n) \geq t$ untuk semua bilangan n ganjil.

Akan ditunjukkan bahwa $m_j(S_m, C_n) \leq t$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $K_{j \times t}$, dan misalkan bahwa S_m adalah bukan subgraf dari F_1 . Jadi, $\Delta(F_1) \leq m-2$. Ini mengakibatkan, $\delta(F_2) \geq (j-1)t - (m-2) = \frac{jt}{2} + \frac{j}{2} - 1 \geq \frac{jt}{2}$, karena $j \geq 3$. Dari Lema IX.1, $F_2 \supseteq C_n$, dimana $n \leq jt$. Oleh karena itu, $m_j(S_m, C_n) \leq t$ untuk semua n ganjil.



Gambar IX.2. Suatu graf bipartit G_2 untuk Subkasus 2.2

Subkasus 2.2. $m = \frac{1}{2}(j-1)(t-1) + 2$ dan j ganjil.

Misalkan V_1, V_2, \dots, V_{j-1} dan V_j adalah himpunan partit dari $K_{j \times t}$. Misalkan $V_j = A \cup B$ dengan $||A| - |B|| \leq 1$. Partisi himpunan partit dari $K_{j \times (t-1)}$ menjadi dua himpunan partit, sebut $X_1 = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{[\frac{j}{2}]} \cup A$ dan $X_2 = V_{[\frac{j}{2}]+1} \cup V_{[\frac{j}{2}]+1} \cup \dots \cup$

$V_{j-1} \cup B$. Misalkan $F[X_1]$ dan $F[X_2]$ adalah dua graf multipartit lengkap. Misalkan $G_1 = F[X_1] \cup F[X_2]$ dan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap $K_{j \times (t-1)}$, lihat Gambar IX.2.

Jadi, G_2 adalah suatu graf bipartit. Ini mengakibatkan, $\Delta(G_1) \leq \frac{1}{2}(j-1)(t-1)$. Karena $\Delta(G_1) \leq \frac{1}{2}(j-1)(t-1) < m-1$, maka $F_1 \not\subseteq S_m$. Selanjutnya, karena G_2 adalah graf bipartit, maka $G_2 \not\subseteq C_n$ untuk n ganjil. Oleh karena itu, $m_j(S_m, C_n) \geq t$ untuk semua n ganjil.

Akan ditunjukkan $m_j(S_m, C_n) \leq t$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $K_{j \times t}$, dan misalkan bahwa S_m adalah bukan suatu subgraf dari F_1 . Jadi, $\Delta(F_1) \leq m-2$. Ini mengakibatkan, $\delta(F_2) \geq (j-1)t - (m-2) = \frac{jt}{2} + \frac{j}{2} - 1 \geq \frac{jt}{2}$. Dari Lema XI.1, $F_2 \supseteq C_n$ dimana $n \leq jt$. Oleh karena itu, $m_j(S_m, C_n) \leq t$ untuk semua n ganjil. \square

Bab X Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $K_{s \times t}$ versus Lintasan

X.I Survey Literatur

Ide bilangan Ramsey multipartit ukuran diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren [4], dan Syafrizal *dkk.* [40] dengan memperhatikan dua faktorisasi dari suatu graf $K_{s \times t}$ dengan jumlah partitnya tetap yaitu s himpunan multipartit. Lebih tepatnya, untuk diberikan dua graf, yaitu misalkan G_1 dan G_2 , dan bilangan asli $s \geq 2$, maka bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_s(G_1, G_2) = t$ adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga sembarang faktorisasi dari graf $K_{s \times t} := F_1 \oplus F_2$ akan memnuhi kondisi berikut, yaitu satu dari berikut: atau F_1 memuat G_1 sebagai subgraf atau F_2 memuat G_2 sebagai subgraf. Bilangan-bilangan Ramsey untuk *path* versus kelas graf lainnya yang diberikan dalam [41], [?], [43], [44], and [46]. Pada bagian ini akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap yang berukuran kecil. Syafrizal Sy *et al.* [45] telah memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap sebagai berikut.

Teorema X.1 Untuk bilangan asli $j, n \geq 3$ dan $b \geq 2$,

$$m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq \begin{cases} (n-1)b, & \text{jika } 3 \leq n \leq j, \\ jb, & \text{jika } j < n < jb, \\ (j-1)\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b, & \text{jika } n \geq jb. \end{cases}$$

Surahmat *dkk.* [39] telah menentukan bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi *star* dan *path* $m_2(P_4, K_{1,n}) = n + 1$ untuk $n \geq 3$. Selanjutnya, Syafrizal Sy [47] menentukan nilai dari bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi *path* dan *tree* sebagai berikut.

Teorema X.2 Untuk bilangan bulat $n, s \geq 2$,

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, \\ & 4 < s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \\ s & \text{untuk } (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < s < n < 2s) \text{ or} \\ & (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Pada tahun 2015, Anie Lusiani *dkk.* [1] telah memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi *star* dan *cycle* $m_j(S_m, C_n)$ dimana $3 \leq n \leq j$ dan sembarang $m \geq 3$.

X.II Path versus $K_{s \times t}$ kecil

Hasil utama yang pertama dari bagian ini adalah menentukan bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil dan *path* dengan $n \geq 2$ titik.

Teorema X.3 Untuk bilangan bulat $n \geq 2$, $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) = 2n + 1$.

Bukti:

Pertama akan ditunjukkan bahwa $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \geq 2n + 1$. Perhatikan sembarang faktorisasi $K_{2 \times 2n} := G_1 \oplus G_2$ dimana $G_1 := K_{1, n-1} \cup K_{n-1, 1}$. Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq K_{2 \times n}$ dan juga $G_2 \not\supseteq P_{4n}$. Oleh karena itu, $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \geq 2n + 1$ untuk semua $n \geq 2$.

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \leq 2n + 1$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari $K_{2 \times (2n+1)}$ sedemikian sehingga $K_{2 \times n}$ adalah bukat sebagai subgraf dari F_1 . Akan ditunjukkan bahwa P_{4n} adalah suatu subgraf dari F_2 . Jadi, dari Lema 1 di [27], F_2 memuat suatu hamiltonian *path*, jadi $F_2 \supseteq P_{4n}$. Oleh karena itu, $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \leq 2n + 1$ untuk semua $n \geq 2$. \square

Hasil utama kedua dari bagian ini adalah penentuan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil dan *path*, yaitu P_n dimana $n = 4, 5, 6$, atau 7.

Teorema X.4 Untuk bilangan positif n , $4 \leq n \leq 7$, $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = 6$.

Bukti.

Untuk $3 \leq n \leq 5$, dari Teorema 2 di [45], dipunyai $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = 6$.

Selanjutnya, dari Teorem 1 di [45], diperoleh batas bawah $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \geq 6$ untuk $6 \leq n \leq 7$.

Untuk menunjukkan batas atas $m_3(K_{P_n, 3 \times 2}) \leq 6$, perhatikan $F \cong K_{3 \times 6}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sembarang faktorisasi dari F sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_n . Akan ditunjukkan bahwa F_2 memuat $K_{3 \times 2}$. Misalkan P adalah *path* terpanjang di F , dan Q adalah *path* terpanjang di graf $F \setminus V(P)$, dan R adalah *path* terpanjang di graf $F \setminus V(P \cup Q)$. Misalkan a dan b adalah titik-titik ujung di P . Misalkan c dan d adalah titik-titik ujung di Q . Misalkan e dan f adalah titik-titik ujung di R . Karena P, Q , dan R adalah tiga *path* terpanjang, maka $xy \notin E(F_1)$ untuk setiap $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$. Misalkan A, B, C adalah himpunan-himpunan partit di F . Perhatikan dua kemungkinan berikut.

Kasus 1: Jika $a, b \in A$, $c, d \in B$, dan $e, f \in C$ maka $uv \notin E(F_1)$ untuk setiap $u, v \in \{a, b, c, d, e, f\}$. Jadi, himpunan $\{a, b, c, d, e, f\}$ akan diinduksi suatu $K_{3 \times 2}$ di F_2 . Oleh karena itu $m_3(K_{3 \times 2}, P_n) \leq 6$ untuk $6 \leq n \leq 7$.

Kasus 2: Jika $a, b \notin A$, $c, d \notin B$, atau $e, f \notin C$. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa $a \in A$ dan $b \in B$, $c \in B$ dan $d \in C$, dan $e \in C$ dan $f \in C$. Jelas bahwa $ac, ae, ce \notin F_1$. Karena $|A| = |B| = |C| = 6$, maka terdapat tiga titik, sebut $u \in A$, $v \in B$, dan $w \in C$ sedemikian sehingga $uv, uw, vw \notin F_1$. Oleh karena itu, himpunan $\{a, u, c, v, e, w\}$ akan menginduksi $K_{3 \times 2}$ di F_2 . Jadi, $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$ untuk $6 \leq n \leq 7$. \square

Daftar Pustaka

- [1] Anie Lusiani, Syafrizal Sy, Edy Tri Baskoro, and Chula Jayawardene, On Size Multipartite Ramsey numbers for Stars versus Cycles, *Procedia Computer Science* 74 (2015), 27 – 31.
- [2] L.W. Beineke and A.J. Schwenk, On a bipartite form of the Ramsey problem, *Congr. Numer.* 15.(1975) 17-22.
- [3] A.P. Burger and J.H. van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part I: Set Numbers, *Discrete Math.* 283 (2004) 37-43.
- [4] A.P. Burger and J.H. van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II: Size Numbers, *Discrete Mat.* 283 (2004) 45-49.
- [5] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press LTD, London (1976).
- [6] J.A. Bondy, Pancyclic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 11 (1971) 80-84.
- [7] Y. Caro and C. Rousseau, Asymptotic bounds for bipartite Ramsey numbers, *Electron J. Combi.*, 8 (2001) R 17.
- [8] V. Chvatal and F. Harary, Generalised Ramsey theory for graphs, II: small diagonal numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 32 (1972) 389-394.
- [9] V. Chvatal and F. Harary, Generalised Ramsey theory for graphs, III: small off-diagonal numbers, *Pacific. J. Math. Soc.* 41 (1972) 335-345.
- [10] F.R.K. Chung and R.L. Graham, On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graph, *J. Combin. Theory*, 18 (1975) 2, 164-169.
- [11] D. Day, W. Goddard, M.A. Henning and HC Swart, Multipartite Ramsey numbers, *Ars Combin.* 58 (2001), 23-31.
- [12] Effendi, Ahmad Iqbal Baqi, dan Syafrizal Sy, size multipartite Ramsey numbers for small $K_{s \times t}$ versus paths, *Int. J. Math. Sci.*, Vol. 10, 2016, no. 22, pp. 1061 - 1065.
- [13] P. Erdős and R. Rado, A partiton calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 62 (1956) 229-489.
- [14] P. Erdos, R.J. Faudree, C.C. Rousseau and R.H. Schelp, Multipartite graph-tree Ramsey numbers, *Proc. of the First China-USA International Graph Theory Conference* 576 (1989), 146–154.

- [15] P. Erdős and Szekeres G., A combinatorial problem in graph, *Compo. Math.*, 2 (1935) 463-370.
- [16] R.J. Faudree and R.H. Schelp, Path-path Ramsey type numbers for complete bipartite graph, *J. Combin. Theory Ser. B* 19 (1975), 161-173.
- [17] W. Goddard, M.A. Henning and O.R. Oellermann, Bipartite Ramsey numbers and Zarankiewicz, *Discrete Mat.* 219 (2000), 85-95.
- [18] Graham R.L., Rothschild B.L. and Spencer J.H., *Ramsey Theory*, John Willey and sons (1990).
- [19] R.E. Greenwood and A.M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graph, *Canad. J. Math.* 7 (1955), 1-7.
- [20] C. Grinstead and S. Roberts, On the Ramsey numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$, *J. Combin. Theory*, 33 B (1982) 27-51.
- [21] A. Gyarfás, M. Ruszinkó, G.N. Sárközy and E. Szemerédi, Tripartite Ramsey numbers for paths, *J. Graph Theory*, 55 (2007), 164–174.
- [22] A. Gyarfás, G.N. Sárközy and R.H. Schelp, Multipartite Ramsey numbers for odd cycles, *J. Graph Theory*, 61 (2009), 12–21
- [23] A. Gyarfás and J. Lehel, A Ramsey-type problem in directed and bipartite graphs, *Periodica Math. Hungar.* 3 (1973), 299-304.
- [24] H. Harborth and I. Mengersen, Some Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *Australas. J. Combin.* 13 (1996) 119-128.
- [25] H. Harborth and I. Mengersen, Ramsey numbers in octahedron graphs, *Discrete Math.* 231 (2001) 241-246.
- [26] J.H. Hattingh and M.A. Henning, Bipartite Ramsey theory, *Utilitas Math.* 53 (1998), 217-230.
- [27] J.H. Hattingh and M.A. Henning, Star-path bipartite Ramsey numbers, *Discrete Math.* 185 (1998), 255-258.
- [28] R.W. Irving, A bipartite Ramsey problem and Zarankiewics numbers, *Glasg. Math. J.* 19 (1978) 13-26.
- [29] J.G. Kalbfleisch, Contruction and special edge-chromatic graphs, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965) 575-584.
- [30] G. Kery, On a theorem of Ramsey (in Hungaria), *Matematikai Lapok*, 15 (1964) 204-224.
- [31] V. Longani, Some bipartite Ramsey numbers, *Southeast Asian Bull. Math.* 26 (2002), 583-592.

- [32] D. McKay and S.P. Radziszowski, $R(4, 5) = 25$, *J. Graph Theory*, 19: 3 (1995) 309-322.
- [33] J.Moon and L.Moser, On Hamiltonian bipartite graphs, *Israel J. Math.* **1** (1963), 163–165.
- [34] Narwen, Effendi, dan Syafrizal Sy, On size multipartite Ramsey numbers for paths versus stars, *Far East J. Math. Sci.* Vol. 100, no. 9, 2016.
- [35] S.P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.*, (2004), DSI. 10.
- [36] F.P. Ramsey, On a problem in formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, 30 (1930) 264 - 286.
- [37] V. Rosta, Ramsey theory applications, *Electron. J. Combin.*, (2004), DSI. 13.
- [38] Surahmat, *Bilangan Ramsey untuk graf roda*, Disertasi Doktor, ITB Bandung 2003.
- [39] Surahmat and Syafrizal Sy, Star-path size multipartite Ramsey numbers, *Applied Mathematical Sciences.* **8**. No. 75, (2014), 3733 – 3736.
- [40] Syafrizal Sy., E.T. Baskoro and S. Uttunggadewa, The size multipartite Ramsey numbers for paths, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **55** (2005) 103-107.
- [41] Syafrizal Sy, E.T. Baskoro and S. Uttunggadewa, The size multipartite Ramsey numbers for small paths versus other graphs, *Far East J. Appl. Math.* 28, Issue 1 (2007) 131-138.
- [42] Syafrizal Sy, E.T. Baskoro, S. Uttunggadewa and H. Assiyatun, Path-path size multipartite Ramsey numbers, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 71 (2009), 265–271.
- [43] Syafrizal Sy, On size multipartite Ramsey numbers for paths versus cycles of three or four vertices, *Far East J. Appl. Math.*, Volume 44 No. 2 July Issue (2010), 109–116.
- [44] Syafrizal Sy, On the size multipartite Ramsey numbers for small path versus cocktail party graphs, *Far East J. Appl. Math.*, Volume 55 No. 1 June Issue (2011), 53–60.
- [45] Syafrizal Sy and E.T. Baskoro, Lower bounds of the size multipartite Ramsey numbers $m_j(P_n, K_{j \times b})$, *American Institute of Physics Proc.*, **1450** (2012), 259-261. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4724150>
- [46] Syafrizal Sy and E.T. Baskoro, Lower bounds for size multipartite Ramsey numbers $m_j(P_n, K_{j \times b})$, *American Institute of Physics Proc.* Vol. 1450, 2012.
- [47] Syafrizal Sy, Tree-path size bipartite Ramsey numbers, *Far East J. Math. Sci.*, Vol. 76 No. 1 (2013), pp 139 – 145.

List of General Symbols for Graph Theory

A	arc himpunan
\mathbf{A}	matrik ketetanggaan dari graf
\mathbf{A}	matrik ketetanggaan dari graf berarah
$b(f)$	batas f
\mathcal{B}	ruang bond
$c(GB)$	tutupan (closure) dari G
cap K	kapasitas dari cut K
\mathcal{C}	ruang cycle
$d_G(v)$	derajat titik v di G
$d_G(f)$	derajat muka f di G
$d_{D^-}(v)$	derajat masuk titik v di G
$d_{D^+}(v)$	derajat keluar titik v di G
$d_G(u, v)$	jarak antara u dan v di G

Daftar Riwayat Hidup

Nama : **Syafrizal Sy**
Tempat Tanggal Lahir : Pekanbaru, 7 Agustus 1967
Pendidikan : SMAN 1 Pekanbaru, lulus tahun 1986
Sarjana Matematika FMIPA UNRI, lulus 1992
Magister, Matematika ITB, lulus 2003
Doktor, Matematika ITB, lulus 2009
Pekerjaan : Dosen Matematika FMIPA UNAND, 1993 - sekarang

Nama : **Edy Tri Baskoro**
Tempat Tanggal Lahir : Jombang, 22 Mei 1964
Pendidikan : SMPP Jombang, lulus tahun 1982
Sarjana Matematika FMIPA ITB, lulus 1987
Magister, University of New England, lulus 1991
Doktor, University of Newcastle Australi , lulus 1996
Pekerjaan : Dosen Matematika FMIPA ITB, 1989 - sekarang

ISBN 978-623-395-211-8

