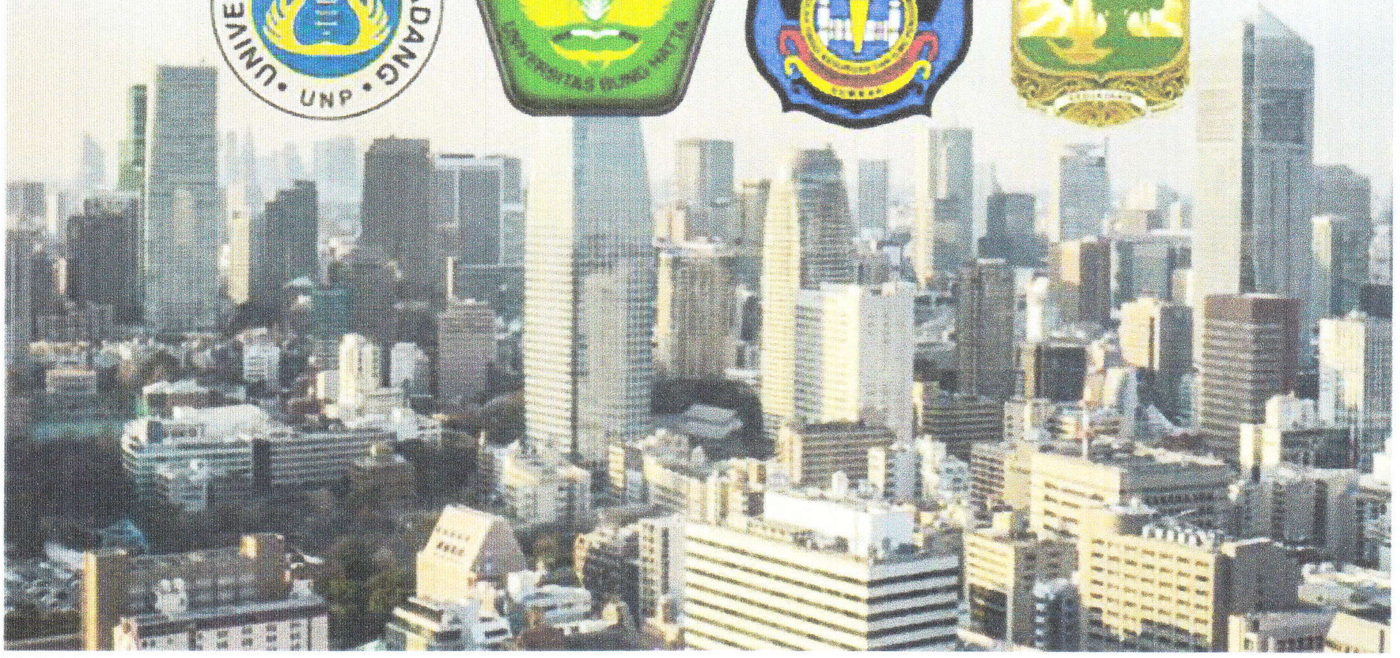
ISSN : 2502-342X

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Peranan Matematika dalam Menyongsong Masyarakat Ekonomi ASEAN (MEA) 2015"

Padang, 3 Oktober 2015



PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Peranan Matematika dalam Menyongsong Masyarakat Ekonomi ASEAN (MEA) 2015"

Editor:

Prof. Dr. Syafrizal Sy
Dr. Syamsudhuha
Dr. Admi Nasra
Dr. Armiati
Dr. M. Imran
Dr. Sri Gemawati
Dr. Rado Yendra
Dr. Irwan, M.Si
Rita Desfitri, M.Sc
Rahmi, M.Si
Merina pratiwi, M.Si
Tika Septia, M.Pd

DAFTAR ISI

Halaman Judul i
Kata Pengantar iii
Daftar Isi iv

Makalah Matematika

No	Pemakalah	Judul	Halaman
1	*Abdul Zaky, Mahdhivan Syafwan*	APLIKASI TRANSFORMASI AFIN PADA WARP DAN MORP GAMBAR BERWARNA	1-9
2	*Ahmad Iqbal Baqi*	ESTIMASI TINGKAT KEMATIAN BAYI DAN HARAPAN HIDUP BAYI KABUPATEN DHAMASRAYA PROVINSI SUMATERA BARAT TAHUN 2010 DENGAN MENGGUNAKAN METODE TRUSSEL	10-14
3	*Ardiyanto, Leli Deswita*	MODEL MATEMATIKA DISKRIT ROMEO DAN JULIET	15-20
4	*Bustami, Sigit Sugiarto, Siti Rukiyah*	TAKSIRAN PARAMETER BENTUK, LOKASI DAN SKALA DARI DISTRIBUSI WEIBULL	21-26
5	*Devi Silvia Rahimi, Mahdhivan Syafwan*	EKSISTENSI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL ADVANCE-DELAY NON-HOMOGEN	27-32
6	*Efendi*	MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK UNTUK MEMPROYEKSIKAN PERTUMBUHAN PENDUDUK INDONESIA	33-38
7	*Faizal Achmad*	KONSEP DAN IMPLEMENTASI ARITMATIKA MODULAR PADA KRIPTOGRAFI KLASIK DAN MODERN	39-48
8	*Ferra Yanuar*	PEMODELAN MODEL LOYALITAS MASYARAKAT PADA PASIEN PUSKESMAS KOTA PADANG	49-53
9	*Hazmira Yozza, Izzati Rahmi HG*	PENENTUAN FAKTOR-FAKTOR YANG MEMPENGARUHI KEPUASAN PEMASOK PT SEMEN PADANG DENGAN ANALISIS REGRESI LOGISTIK ORDINAL	54-62
10	*Is Esti Firmanesa*	UJI LINEAR SPAN PADA KERANDOMAN FUNGSI HASH SHA-256	63-70
11	*Izzati Rahmi H.G, HazmiraYozza, Rachmi Dwinta Sari*	PENERAPAN ANALISIS KORELASI KANONIK UNTUK MENGANALISIS HUBUNGAN ANTARA PENYAKIT YANG DISEBABKAN NYAMUK DENGAN ASPEK SANITASI LINGKUNGAN	71-79
12	*Maiyastri*	MODEL DERET WAKTU UNTUK INVESTASI	80-92

No	Pemakalah	Judul	Halaman
13	*Noor Hidayat*	PENGARUH PEMILIHAN KEMIRINGAN LIMITER PADA SKEMA CENTRAL UPWIND ORDER-KEDUA UNTUK HUKUM KONSERVASI SKALAR	93-99
14	*Radhiatul Husna*	PENYELESAIAN PERSAMAAN KUINTIK TRINOMIAL SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BESSEL DENGAN MENGGUNAKAN METODE FROBENIUS	100-103
15	*Riri Lestari, Anggrita Januarti*	PENGGUNAAN METODE FACKLER PADA PENGHITUNGAN CADANGAN PREMI TAHUNAN KOTOR ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP	104-108
16	*Suci Astutik*	PEMODELAN DATA CURAH HUJAN HARIAN MENGGUNAKAN ZERO INFLATED GAMMA DENGAN KOVARIAT	109-115
17	*Tiska Sari, Dewi Murni, Yusmetrizal*	PENYELESAIAN PERSAMAAN KUINTIK TRINOMIAL	116-123
18	*Wahyu Indah Rahmawati*	PENGUJIAN COVERAGE PADA SHA-256	124-130

Makalah Pendidikan Matematika

No	Pemakalah	Judul	Halaman
19	*Adevi Murni Adel, Rosmiyati*	KEVALIDAN MENGEMBANGKAN BUKU KERJA KALKULUS I BERBASIS KONTRUKTIVISME DI FKIP UMMY SOLOK	131-139
20	*Arnellis*	HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY PENGGUNAAN INTEGRAL "LUAS KURVA" UNTUK MENGEMBANGKAN KEMAMPUAN BERPIKIR MATEMATIS TINGKAT TINGGI	140-147
21	*Asni, Yulia Haryono, Merina Pratiwi*	PENERAPAN PEER LESSONS TERHADAP SIKAP DAN HASIL BELAJAR SISWA SMKN KELAS X	148-151
22	*Elita Zusti Jamaan*	PENGGUNAAN LEMBAR KERJA SISWA BERBASIS BERPIKIR KRITIS MATEMATIS UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA SDN 10 SURAU GADANG KECAMATAN NANGGALO KOTA PADANG	152-158
23	*Irwan, Sri Elniati, Sri Novia Martin*	PENGEMBANGAN LEMBAR KERJA SISWA BERBASIS PENDEKATAN SAINTIFIK PADA MATERI TRIGONOMETRI UNTUK SISWA KELAS X	159-167

No	Pemakalah	Judul	Halaman
24	*Jazwinarti, Suherman, Nurul Afifah Rusyda*	PENGARUH PENERAPAN MODEL CONTEXTUAL TEACHING AND LEARNING TERHADAP KEMAMPUAN PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIS SISWA KELAS VII SMP NEGERI 13 PADANG TAHUN PELAJARAN 2014/2015	168-174
25	*Khairudin, Karmila Suryani*	PENGARUH KONSEP DIRI DAN PENGETAHUAN PELUANG KERJA TERHADAP MINAT SISWA SMP MELANJUTKAN KE SMK DI KOTA PADANG	175-180
26	*Minora Longgom Nasution, Nidaul Khairi, Mukhni*	PENERAPAN PENDEKATAN PEMBELAJARAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK TERHADAP PERKEMBANGAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA	181-190
27	*Mirna*	PENINGKATAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA DAN NILAI KARAKTER SISWA MELALUI PENERAPAN MODEL PROBLEM BASED LEARNING	191-197
28	*Mukhni, Nilawasti ZA, Ayu Handayani*	ANALISIS KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA KELAS VII MTSN LUBUK BUAYA PADANG MELALUI PENERAPAN PENDEKATAN PENDIDIKAN MATEMATIKA	198-205
29	*Reno Warni Pratiwi*	TAHAP *DEFINE* PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBASIS KONSTRUKTIVISME PADA PERKULIAHAN ALJABAR LINIER ELEMENTER DI UMMY SOLOK	206-208
30	*Suherman*	ANALISIS KESALAHAN PESERTA DIDIK DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA TENTANG SISTEM PERSAMAAN	209-217
31	*Susda Heleni*	PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF PENDEKATAN STRUKTURAL THINK PAIR SQUARE UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS IX_1 SMP NEGERI 22 PEKANBARU	218-224
32	*Syafriandi*	DESAIN PEMBELAJARAN VOLUME BENDA PUTAR MENGGUNAKAN HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY	225-232
33	*Titi Solfitri, Ratih Surya Pratiwi*	PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS MASALAH (PROBLEM BASED LEARNING) UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS VIII.2 SMP NEGERI 4 PEKANBARU	233-240
34	*Yerizon, Mirna, Karweli Sinta*	PENGARUH PENERAPAN PROBLEM BASED LEARNING TERHADAP KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIS KELAS VIII SMP NEGERI 2 LUBUK BASUNG	241-247

No	Pemakalah	Judul	Halaman
35	*Yusmarni*	ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN STATISTIKA MATEMATIKA I	248-256
36	*Zulkarnain*	PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STUDENT TEAM ACHIEVEMENT DIVISION (STAD) DI SDN KECAMATAN MANDAU TAHUN 2014/2015	257-263

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BESSEL DENGAN MENGGUNAKAN METODE FROBENIUS

Radhiatul Husna

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas

husna@fmipa.unand.ac.id, husna_math@yahoo.com

Abstrak. Persamaan diferensial Bessel merupakan salah satu bentuk persamaan diferensial biasa orde dua dengan koefisiennya berupa variebel. Untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial tersebut, banyak cara yang bisa dipilih seperti dengan menggunakan ekspansi deret Laurent, transformasi Laplace, deret pangkat, dan metode Frobenius, Dalam hal ini, solusi dari persamaan diferensial tersebut lebih mudah ditentukan dengan menggunakan menggunakan metode Frobenius. Oleh karena itu, dalam tulisan ini dikaji bagaimana menentukan solusi persamaan diferensial Bessel dengan menggunakan metode Frobenius. Dari hasil penelitian ini diperoleh fungsi Bessel jenis pertama dan jenis kedua. Fungsi Bessel ini banyak diterapkan pada bidang fisika seperti dalam masalah gelombang elektromagnetik, konduksi panas, dan getaran.

Kata Kunci: Persamaan Difrensial Bessel, Fungsi Bessel, Metode Frobenius

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial Bessel muncul ketika menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang melibatkan kordinat polar dan silinder. Persamaan tersebut pertama kali didefinisikan oleh seorang matematikawan Daniel Bernoulli pada tahun 1732 dalam penelitiannya mengenai masalah rantai gantung (*hanging chain problem*). Kemudian persamaan serupa muncul pada tahun 1732 dalam kerja Lagrange yang berkaitan dengan masalah astronomi. Ketika sedang melakukan penyelidikan mengenai masalah gerak planet eliptik (*elliptic planetary motion*) pada tahun 1824, seorang ahli astronomi Jerman yaitu Friedrich Wilhelm Bessel menemukan bentuk khusus persamaan diferensial yang dinamakan persamaan diferensial Bessel.

2. PERSAMAAN DIFERENSIAL BESSEL

Persamaan diferensial Bessel berorde $n \geq 0$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \qquad (1)$$

Persamaan ini merupakan persamaan diferensial biasa orde dua yang memiliki titik singular beraturan (*regular singular point*) di $x = 0$. Solusi dari persamaan diferensial ini adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Karena persamaan diferensial berorde dua, maka diperoleh dua solusi yang saling bebas linier. Solusi umum (1) dapat dberikan oleh

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \qquad (2)$$

dimana c_1 dan c_2 suatu konstanta sebarang dan n bukan bilangan bulat. $J_n(x)$ yang mempunyai limit berhingga untuk x mendekati nol dinamakan *fungsi Bessel jenis pertama* berorde n, sedangkan $J_{-n}(x)$ yang tidak mempunyai limit berhingga untuk x mendekati nol dinamakan *fungsi Bessel jenis kedua* berorde n.

3. METODE FROBENIUS

Metode Frobenius (dinamakan demikian setelah ditemukan oleh Ferdinand Georg Frobenius) adalah suatu cara mencari solusi deret tak hingga untuk persamaan diferensial orde 2 dalam bentuk berikut:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (3)$$

yang memiliki titik singular regular di $x=x_0$. Dalam hal ini, metode Frobenius merupakan bentuk solusi deret pangkat yang diperluas. Metode ini menyatakan bahwa dapat ditentukan solusi berbetuk deret pangkat yaitu

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r} \qquad (4)$$

dimana $a_k\neq 0$ dan dengan mencari turunan pertama dan keduanya dari persamaan (4) yang kemudian disubstitusikan ke (3). Setelah itu kelompokkan koefisien-koefisiennya berdasarkan pangkat untuk memperoleh rumus rekursif untuk suku ke-a_k dan nyatakan ekspansi deret tersebut dalam bentuk a_k. Dengan menyamakan suku a_0 dengan nol diperoleh persamaan karakteristiknya (persamaan *indicial*) sehingga dapat dicari akar persamaan karakteristiknya yaitu r. Perlu diperhatikan bahwa dalam menentukan akar tersebut hanya fokus pada koefisien dari pangkat terendah x.

4. SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BESSEL

Untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial Bessel (1) disini digunakan metode Frobenius. Dalam hal ini, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa persamaan tersebut mempunyai titik singular beraturan di $x=0$. Berdasarkan metode Frobenius, maka solusinya berbentuk (4). Kemudian dapat ditentukan turunan pertamanya yaitu

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1} \qquad (5)$$

dan turunan keduanya yaitu

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r-1)(k+r)a_kx^{k+r-2}. \qquad (6)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4), (5), dan (6) ke (1) diperoleh

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r-1)(k+r)a_kx^{k+r-2}+$$

$$x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1}+\left(x^2-n^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$

atau dapat ditulis

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r-1)(k+r)a_kx^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r}-n^2\sum_{k=o}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$

dimana pada suku ketiga indeks sigma diubah menjadi $k = 2$ sehingga setiap deret tersebut dinyatakan dalam bentuk x^{k+r} . Selanjutnya dengan menjabarkan suku-suku yang terkait dengan $k = 0$ dan $k = 1$ secara terpisah, maka didapatkan

$$a_0\left(r^2 - n^2\right)x^r + a_1[(r+1)^2 - n^2]x^{r+1} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k\left([(k+r)^2 - n^2] + a_{k-2}\right)x^{k+r} = 0$$

dan dengan menyamakan koefisien deret tersebut dengan nol, maka diperoleh

(7) $a_0\left(r^2 - n^2\right) = 0$ untuk $k = 0$

(8) $a_1[(r+1)^2 - n^2] = 0$ untuk $k = 1$

(9) $a_k\left([(k+r)^2 - n^2] + a_{k-2}\right) = 0$ untuk $k \geq 2$

Dari (7), karena $a_0 \neq 0$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$(r+n)(r-n) = 0 \qquad (10)$$

dengan akar-akar persamaan karakteristiknya $r = n$ dan $r = -n$.

4.1. Fungsi Bessel Jenis Pertama

Untuk $r = n$ pada persamaan (9) diperoleh suatu hubungan rekursif

$$a_k = \frac{-1}{k(k+2n)} a_{k-2} \text{ untuk } k \geq 2. \quad (11)$$

Persamaan (11) ini merupakan relasi rekursif dua langkah sehingga suku-suku berindeks genap dan ganjil ditentukan secara terpisah. Terlebih dahulu untuk suku berindeks ganjil dengan $r = n$, persamaan (8) dapat ditulis menjadi

$$a_1[(n+1)^2 - n^2] = 0$$

yang mengakibatkan $a_1 = 0$ (ingat bahwa pada persamaan (1)) dan juga $a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Kemudian untuk lebih menemukan pola pada suku berideks genap, relasi rekursif dengan $k = 2i$ ditulis kembali sebagai berikut:

$$a_{2i} = \frac{-1}{2^2 i(i+n)} a_{2(i-1)} \text{ untuk } i \geq 1. \quad (12)$$

Dari persamaan (12) diperoleh

$$a_2 = \frac{-1}{2^2(1+n)} a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{2^2\, 2(2+n)} a_2 = \frac{-1}{2^4\, 2!(1+n)(2+n)} a_0$$

$a_6 = \dfrac{-1}{2^2\, 3(3+n)} a_4 = \dfrac{-1}{2^6\, 3!(1+n)(2+n)(3+n)} a_0$ dan seterusnya. Selanjutnya dengan mensubstitusikan semua koefisien yang sudah diperoleh tersebut ke (4), maka diperoleh satu solusi persamaan diferensial Bessel yaitu

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{2k}\, k!(1+n)(2+n)\ldots(k+n)} x^{2k+n} \text{ untuk } a_k \neq 0 \text{ sebarang.}$$

(13)

Solusi ini dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi gamma dengan memilih

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

dan menyederhanakan suku-suku pada deret tersebut dengan menggunakan sifat dasar fungsi gamma yaitu

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

sehingga

$$\Gamma(1+n)[(1+n)(2+n)\ldots(k+n)] = \Gamma(2+n)[(2+n)\ldots(k+n)]$$
$$= \Gamma(3+n)[\ldots(k+n)]$$
$$= \ldots = \Gamma(k+n+1).$$

Setelah penyederhanaan ini, dari persamaan (13) diperoleh solusi pertama dari persamaan diferensial Bessel yaitu **fungsi Bessel jenis pertama berorde *n***, yang dinotasikan dengan $J_n(x)$ yang dapat ditulis sebagai berikut

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (14)$$

atau dapat ditulis

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (15)$$

dimana $\Gamma(k+n+1) = (k+n)!$.

4.2. Fungsi Bessel Jenis Kedua

Untuk $r = -n$ dengan cara yang analog dengan cara menentukan solusi pertama dari persamaan diferensial Bessel, maka diperoleh solusi keduanya yaitu

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \qquad (16)$$
$$= (-1)^n J_n(x)$$

dimana $J_{-n}(x)$ disebut **fungsi Bessel jenis kedua berorde *n***.

5. Kesimpulan

Persamaan diferensial Bessel merupakan persamaan diferensial orde dua yang koefisiennya berupa variabel. Untuk mendapatkan solusi dari persamaan deferensial ini lebih mudah digunakan metode Frobenius dimanass solusinya berbentuk deret pangkat yang diperluas. Solusi umum dari persamaan diferensial tersebut disebut fungsi Bessel jenis pertama dan kedua yang banyak diterapkan dalam bidang fisika.

Referensi

1. Adkins, W.A and Davitson,M.G., *Ordinary Differential Equation*, Springer, 2012.
2. Boyce, W.E., and DiPrima, R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Inc, USA, 2013.
3. *Frobenius Method*, www.mathworld.wolfram.com/FrobeniusMethod.html
4. Kreh, M., *Bessel Functions*, math.psu.edu/papikian/Kreh.pdf.