

## Analisis Getaran pada Model Rotor dengan Pendekatan Disk Tipis/Tebal

Jhon Malta<sup>1,a</sup>, Getar Elba Perjaka<sup>2,b</sup>, Mulyadi Bur<sup>3,c</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Andalas, Indonesia

<sup>2</sup> Alumni, Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Andalas, Indonesia

<sup>3</sup> Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Andalas, Indonesia

Email: <sup>a</sup>jhonmalta@ft.unand.ac.id, <sup>b</sup>getarelbaperjaka37@yahoo.com, <sup>c</sup>mulyadibur@ft.unand.ac.id

### Abstrak

Pada penelitian ini dilakukan kaji numerik terhadap model modifikasi Laval/Jeffcott rotor. Pada kelompok pertama model rotor ini, massa poros rotor diasumsikan menjadi massa disk tipis di mana perbandingan inersia massa aksial disk dengan inersia massa polar disk lebih kecil dari satu. Selanjutnya pada kelompok kedua adalah rotor dengan masa disk tebal, di mana perbandingan inersia massa aksial disk dengan inersia massa polar disk lebih besar dari satu. Dengan massa disk konstan, sedangkan ketebalan disk divariasikan, maka diameter disk juga disesuaikan dengan perubahan dimensinya, sehingga pengaruh momen gyroskopik akan berbeda-beda pada masing-masing model rotor. Berdasarkan analisis getaran pada model rotor berputar, diperoleh *eigen value* rotor dalam fungsi kecepatan putar yang ditampilkan pada diagram Campbell. Pada diagram ini terlihat bahwa putaran motor pada disk tipis tidak pernah mencapai *eigen value* ke empat rotor berputar. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semua model rotor bersifat stabil, karena nilai riil dari *eigen value* selalu nol. Rotor dengan perbandingan inersia massa aksial disk dengan inersia massa polar disk mendekati nilai 0.76 dari batas disk tipis-tebal memiliki *eigen value* yang lebih tinggi dibandingkan dengan rotor dengan disk sangat tipis/sangat tebal.

**Kata kunci** : Laval/Jeffcott rotor, *eigen value*, momen gyroskopik, disk tipis/tebal

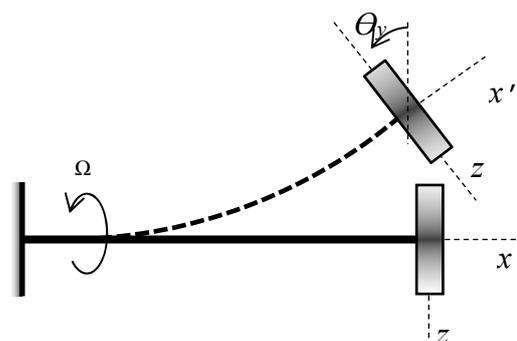
### Latar belakang

Analisis karakteristik dinamik rotor sudah mulai dilakukan sejak tahun 1883 oleh Gustaf De Laval, yang dikenal sebagai Laval rotor. Pada penelitian lain yang terpisah dilakukan oleh H.H. Jeffcott pada tahun 1919, di mana modelnya disebut dengan Jeffcott rotor [1,2,3].

Model Laval rotor ataupun Jeffcott rotor merupakan pemodelan rotor yang paling sederhana, di mana sebuah rotor dimodelkan sebagai sebuah disk tipis yang dipasang pada sebuah poros tak bermassa dan ditumpu dengan tumpuan sederhana. Pemodelan yang menggunakan basis Laval rotor atau Jeffcott rotor sudah banyak dikembangkan. Compos [4], telah melakukan investigasi getaran rotor dengan model Jeffcott rotor untuk membandingkan hasil analisis eksperimental dan numerik dengan menggunakan *Lagrangian Bond Graph* untuk penurunan persamaan differensial gerak dari sistem rotor. Selain itu, model Jeffcott rotor digunakan oleh Wedyan, dkk [5] untuk meneliti putaran rotor untuk menghitung kestabilan rotor. Selanjutnya, aplikasi model Laval/Jeffcott rotor dengan disk tebal pun sudah banyak diterapkan dalam analisis rotor [6,7]. Meskipun demikian, kajian batasan penggunaan disk tipis/tebal belum diteliti secara mendalam.

### Rotor dengan Momen Gyroskopik

Rotor yang diasumsikan memiliki empat derajat kebebasan berasal dari sebuah disk yang dapat bergerak arah vertikal dan arah horizontal dan dua arah gerak lagi dengan memasukkan efek dari momen gyroskopik dari masing-masing sumbu tersebut. Momen gyroskopik muncul karena adanya gerakan rotasi pada rotor, di mana arah gerak disk tidak sejajar dengan arah gravitasi bumi, melainkan tegak lurus terhadap poros. Rotor yang mengalami momen gyroskopik dapat dilihat pada Gambar 1, di mana, model rotor jepit bebas diputar dengan putaran konstan ( $\Omega$ ), dan posisi disk membentuk sudut *precision*  $\theta_y$ .

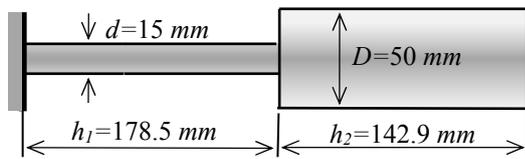


Gambar 1 Model rotor dengan momen gyroskopik

### Metodologi

Pada dasarnya model Laval/Jeffcott rotor menggunakan asumsi rotor dengan disk tipis dan poros tak bermassa. Pada penelitian ini, massa poros total diasumsikan sebagai massa disk. Untuk model rotor dengan disk tipis, maka jari-jari disk akan lebih besar dan jika disknya dimodelkan menjadi lebih tebal maka diameter disknya akan lebih kecil.

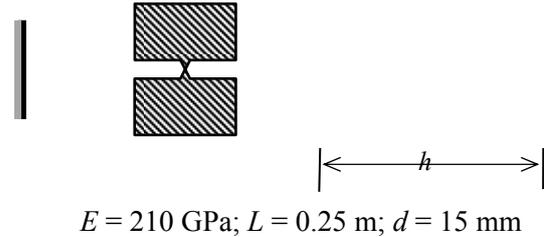
Model rotor yang akan dianalisis di sini merupakan penyederhanaan dari rotor dengan propeller (i.e. rotor turbin angin). Bentuk penyederhanaan rotor ini dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2 Model rotor aktual

Rotor turbin angin sederhana biasanya ditumpu dengan dua buah bearing yang jaraknya tidak terlalu jauh. Dengan asumsi seperti ini maka kondisi poros di antara dua bearing tersebut cukup kaku, sehingga bagian poros yang menjorok keluar (*overhang*) dapat diasumsikan dengan poros jepit. Bagian poros ini digunakan sebagai tempat propeller. Bagian poros dan propeller itu sendiri dapat diasumsikan menjadi poros dengan diameter yang lebih besar (massa propeller dimodelkan menjadi massa poros yang ditempatkan di ujung poros).

Untuk membuat model matematik dari rotor pada Gambar 2, masih diperlukan penggunaan asumsi untuk penyederhanaan model. Dengan penggunaan pendekatan model Laval/Jeffcott rotor, maka massa poros dapat diasumsikan menjadi massa disk, dengan catatan massa total sistem rotor tetap konstan. Disk ditempatkan di titik berat poros dengan diameter besar (i.e. posisi propeller pada poros), sehingga panjang poros  $L=0.25$  m. Dalam analisis rotor, ketebalan disk divariasikan mulai dari 0.01 m sampai ketebalan yang sama dengan panjang poros. Dengan massa konstan, maka setiap variasi ketebalan disk ( $h$ ), jari-jari poros ( $R$ ) juga akan berubah, sehingga inersia massa aksial  $J_a$  dan inersia massa polar  $J_p$  disk juga akan berbeda untuk masing-masing variasi.



Gambar 3 Rotor modifikasi: massa porosnya dipindahkan ke massa disk

Dalam analisis, sebuah disk dapat ditentukan sebagai disk tipis atau tebal berdasarkan besaran momen inersia massa aksial ( $J_a$ ) dan momen inersia massa polar ( $J_p$ ). Berdasarkan referensi [2], disebutkan bahwa jika momen inersia massa polar lebih besar dibandingkan momen inersia massa aksial ( $J_p > J_a$ ), maka disk dapat dikatakan tipis dengan batasan nilai terendahnya yaitu  $J_p = 2J_a$ . Jika momen inersia massa polarnya lebih kecil dibandingkan dengan momen inersia massa aksialnya ( $J_p < J_a$ ), maka disk bisa dikatakan tebal.

Momen inersia massa aksial dapat dihitung dengan menggunakan Pers. 1, sedangkan momen inersia massa polar dapat ditentukan dengan menggunakan Pers. 2.

$$J_a = \frac{m}{12} (3R^2 + h^2) \quad (1)$$

$$J_p = \frac{m}{2} R^2 \quad (2)$$

Berdasarkan Pers. 1 dan 2, untuk kondisi  $J_p = J_a$ , maka diperoleh

$$\frac{m}{12} (3R^2 + h^2) = \frac{m}{2} R^2, \quad (3)$$

sehingga untuk disk tebal berlaku hubungan

$$h > R\sqrt{3}. \quad (4)$$

Selanjutnya, dalam analisis getaran rotor persamaan differensial gerak sistem rotor harus diturunkan terlebih dahulu, dengan asumsi redaman luar dan redaman dalam tidak diperhitungkan. Berdasarkan referensi [2], telah dijelaskan dengan rinci penurunan persamaan differensial gerak sistem rotor jepit seperti pada Gambar 3, sehingga di sini tidak perlu dibahas lebih jauh. Persamaan differensial gerak sistem rotor tersebut adalah

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (5)$$

di mana  $[M]$  adalah matriks massa sistem rotor dengan koefisien matriks massa terdiri dari massa disk dan inersia massa aksial disk, yaitu

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_a \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Selanjutnya matriks gyroskopik  $[G]$  merupakan fungsi dari kecepatan putaran rotor yaitu

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \Omega \\ 0 & 0 & J_p \Omega & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Matriks kekakuan poros  $[K]$  disusun berdasarkan kelenturan poros yang tergantung pada modulus elastisitas ( $E$ ) material poros, inersia penampang poros, dan panjang poros ( $L$ ), dengan koefisien matriks kekakuan adalah

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 & -K_{12} \\ K_{12} & 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & -K_{12} & 0 & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Besaran koefisien matriks kekakuan  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{22}$  ditentukan berdasarkan Tabel 1.

Selanjutnya matriks-matriks vektor perpindahan, kecepatan, dan percepatan ditulis secara berurutan sebagai berikut

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} z \\ y \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}; \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix}; \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

dan vektor gaya  $\{F\}$  berisikan gaya sentripetal yang berasal dari massa tak seimbang pada disk, yaitu

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 \cos(\omega t) \\ m\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Tabel 1 Formula dan besaran momen inersia penampang dan kekakuan poros

Formula	Nilai
$I = \frac{\pi d^4}{64}$	2.485 E-9 m <sup>4</sup>
$K_{11} = \frac{12EI}{L^3}$	4.008 E+5 N/m
$K_{12} = \frac{6EI}{L^2}$	5.009 E+4 N
$K_{22} = \frac{4EI}{L}$	8.349 E+3 Nm

Dalam penghitungan *eigen value*, vektor matriks gaya tidak diperhitungkan. Untuk memudahkan dalam penghitungan *eigen value* sistem rotor dalam fungsi kecepatan putaran poros, persamaan differensial gerak rotor disusun dalam bentuk *state-space*, dan hasilnya ditampilkan dalam diagram Campbell.

### Hasil dan Pembahasan

Penentuan *eigen value* untuk setiap variasi model rotor dihitung berdasarkan persamaan homogen pada Pers. 5 di mana vektor matriks gaya sama dengan nol. Hasil *eigen value* masing-masing variasi ketebalan disk rotor dicantumkan pada Tabel 2.

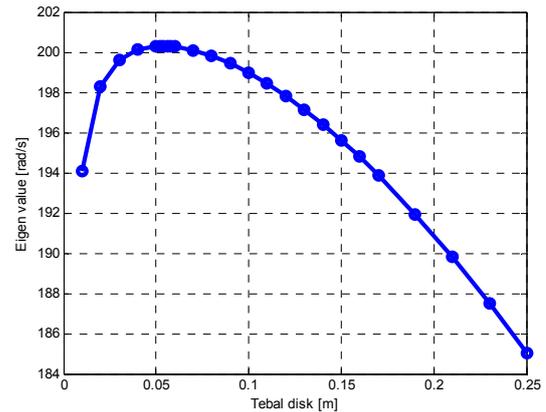
Tabel 2 *Eigen value* rotor dengan variasi ketebalan disk

Tebal disk [m]	Jari-jari disk [m]	$J_a/J_p$	$\omega_{n1}, \omega_{n2}$ [rad/s]	$\omega_{n3}, \omega_{n4}$ [rad/s]
0.01	0.0997	0.5017	194.10	1225.8 2
0.02	0.0705	0.5134	198.28	1677.4 3
0.03	0.0576	0.5453	199.60	1980.3 6
0.04	0.0498	0.6073	200.13	2162.0 2
0.05	0.0446	0.7097	200.30	2233.1 9
0.052	0.0437	0.7358	200.31	2236.4 5
0.054	0.0429	0.7641	200.31	2236.4 9
0.056	0.0421	0.7945	200.30	2233.5 5

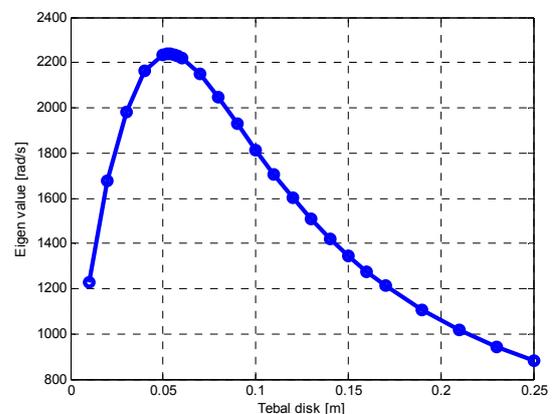
0.058	0.0414	0.8272	200.29	2227.85
0.06	0.0407	0.8623	200.27	2219.64
0.07	0.0377	1.0753	200.10	2148.82
0.08	0.0352	1.3587	199.81	2046.51
0.09	0.0332	1.7227	199.43	1931.44
0.10	0.0315	2.1772	198.97	1815.19
0.11	0.0301	2.7324	198.43	1704.01
0.12	0.0288	3.3983	197.82	1600.80
0.13	0.0276	4.1849	197.15	1506.54
0.14	0.0266	5.1023	196.42	1421.16
0.15	0.0257	6.1607	195.63	1344.15
0.16	0.0249	7.3700	194.79	1274.75
0.17	0.0242	8.7403	193.87	1212.18
0.19	0.0229	12.0042	191.94	1104.60
0.21	0.0218	16.0329	189.80	1016.14
0.23	0.0208	20.9069	187.50	942.71
0.25	0.0199	26.7068	185.04	881.14

Pada Tabel 2 dicantumkan nilai *eigen value*  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , dan  $\omega_4$  sistem rotor. Besaran  $\omega_1$  dengan  $\omega_2$ , dan  $\omega_3$  dengan  $\omega_4$  bernilai sama karena penampang poros bulat, sehingga kekakuan poros arah vertikal dan arah horizontal juga bernilai sama.

Dari tabel juga terlihat bahwa penentuan disk tipis/tebal berada pada variasi model rotor dengan ketebalan disk antara 0.06 m dan 0.07 m (garis merah pada Tabel 2), di mana perbandingan  $J_a/J_p$  sama dengan satu. Meskipun demikian nilai *eigen value* pada variasi model dengan ketebalan disk ini tidak berada pada nilai puncak. Nilai *eigen value* tertinggi justru terjadi pada perbandingan  $J_a/J_p$  di sekitar angka 0.76 (garis kuning pada Tabel 2) seperti yang terlihat pada Gambar 4 dan 5. Pada gambar tersebut terlihat bahwa nilai tertinggi *eigen value* terjadi pada variasi model rotor dengan ketebalan 0.054 m.



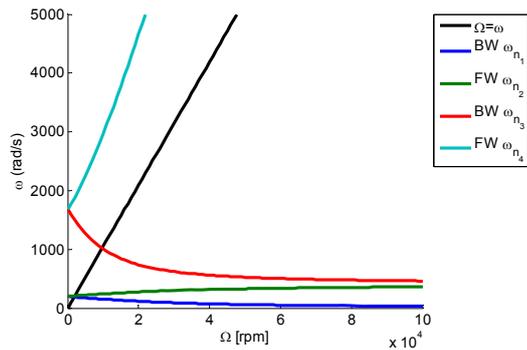
Gambar 4 *Eigen value* ke-1 dan ke-2 model rotor dengan variasi ketebalan disk



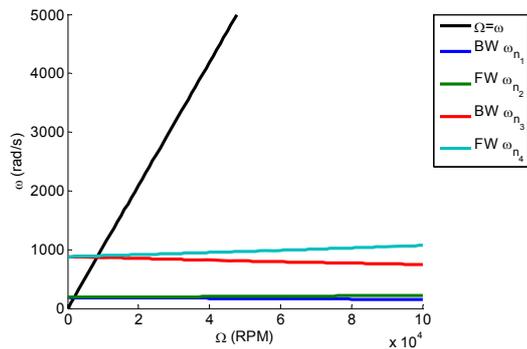
Gambar 5 *Eigen value* ke-3 dan ke-4 model rotor dengan variasi ketebalan disk

Selanjutnya, pada diagram Campbell seperti pada Gambar 6 dan 7 diperlihatkan besaran *eigen value* sistem rotor berputar terhadap putaran poros. Untuk rotor dengan poros bulat dalam kondisi diam (kecepatan putar sama dengan nol), *eigen value* bernilai sama untuk *eigen value* rotor berputar pertama dan ke dua serta yang ke tiga dan ke empat, kemudian dengan naiknya kecepatan putaran motor maka terjadi perubahan pada *eigen value* rotor berputar. Pada garis *eigen value* yang bersilangan dengan garis kecepatan putaran motor akan terjadi kondisi kecepatan kritis rotor.

Di samping itu, pada diagram Campbell juga dapat diketahui fenomena putaran yang terjadi pada rotor yaitu putaran maju (*forward whirl* selanjutnya ditulis *FW*) dan putaran mundur (*backward whirl* selanjutnya ditulis *BW*). Untuk *BW*  $\omega_{n1}$  merupakan *eigen value* pertama rotor kondisi berputar. *FW*  $\omega_{n2}$  merupakan *eigen value* ke dua. Selanjutnya, untuk *eigen value* ke tiga yaitu *BW*  $\omega_{n3}$  dan *eigen value* yang ke empat yaitu *FW*  $\omega_{n4}$ .



Gambar 6 Diagram Campbell model rotor dengan disk tipis (tebal=0.02 m)



Gambar 7 Diagram Campbell model rotor dengan disk tebal (tebal=0.25 m)

### Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan pada model rotor empat derajat kebebasan yang dipengaruhi oleh momen gyroskopik tanpa redaman luar maupun redaman dalam diketahui bahwa:

- Model rotor dengan perbandingan inersia massa aksial  $J_a$  disk dengan inersia massa polar  $J_p$  disk pada nilai sekitar 0.76 dari batas disk tipis-tebal memiliki *eigen value* yang lebih tinggi dibandingkan dengan model rotor dengan disk sangat tipis/sangat tebal.
- Putaran motor pada disk tipis tidak pernah melewati *eigen value* ke-4 rotor berputar.
- Rotor tetap stabil dengan perubahan ketebalan disk.
- Semakin besar perbandingan antara momen inersia massa aksial  $J_a$  terhadap momen inersia massa polar  $J_p$  (asumsi disk tebal), maka semakin kecil selisih antara eigen frekuensi rotor berputar ke-1 dan ke-2, serta eigen frekuensi yang ke-3 dan ke-4.

### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Universitas Andalas yang telah membiayai sebagian penelitian ini yang merupakan penelitian Fundamental Universitas Andalas tahun ke-2 yang dilaksanakan pada tahun 2014 dengan Kontrak No. 18/UN.16/PL/D-FD/2014.

### Referensi

- [1] Genta, G. *Dynamic of Rotating System*. Spinger. New York. 2005.
- [2] Gasch. R. *Rotordynamik*. Spinger-Verlag. Berlin. 2006.
- [3] Krämer. E. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag. Berlin. 1993.
- [4] Campos, J. *Rotordynamic Modeling Using Bond Graphs: Modeling the Jeffcott Rotor*. Ieee Transactions On Magnetics, Vol. 41, No.1. 2005.
- [5] Al-Wedyan, H.M, et. al. *The Behaviour of The Jeffcott Rotor Under a Vibrating Base of Fluid Film Bearing*. Suranaree J. Sci. Technol 15(3):167-176. 2008.
- [6] Malta, J. *Pemetaan Kestabilan Turbin Gas Horizontal dengan Pendekatan Rotor Multi Disk*, Prosiding SNTTM XI, Yogyakarta, 2012, pp. 2065-2070.
- [7] Malta, J. *A Modified Rotor Model to Approach the Dynamic Responses of Anisotropic Rotor with Different Shaft Orientation*, Proceeding of 13th International Conference on Quality in Research, Yogyakarta, 25-28 June 2013, pp. 91-96.