Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 1 – 9
ISSN : 2303–2910

SIFAT-SIFAT MANIFOLD TOPOLOGI

ABDI RAHMAT, HARIPAMYU, JENIZON

Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: abdirahmat.resta@gmail.com

Abstrak. Manifold topologi merupakan ruang topologi dengan sifat-sifat tertentu yang menggambarkan bahwa ruang tersebut secara lokal terlihat seperti $\mathbb{R}^n$. Topologi merupakan kajian objek geometri yang fleksibel dengan mengawetkan proses deformasi objek yang diawetkan oleh homeomorfisma. Manifold topologi adalah suatu generalisasi dari kurva dan permukaan. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji manifold topologi pada ruang Euklidis $\mathbb{R}^n$ yang memiliki sifat-sifat Hausdorff, mempunyai *countable basis* dan Euklidis berdimensi n lokal dan manifold topologi dengan *smooth structure*. Penelitian ini juga mengkaji bahwa grafik dari f yang didefinisikan oleh

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k |\ x \in U \text{ dan } y = f(x)\},$$

dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}^{n+k}$ adalah suatu manifold topologi berdimensi n, jika $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah buka dan $f : U \to \mathbb{R}^k$ adalah kontinu. Selanjutnya dibahas bahwa grafik $\Gamma(f)$ adalah manifold *smooth* apabila ditambahkan *smooth structure* $\varphi : \Gamma(f) \to U$.

Kata Kunci: Ruang Euklidis, Manifold Topologi, Hausdorff, *Countable Basis*, *Smooth Structure*, Homeomorfisma, Grafik Fungsi, *Chart*, Manifold *Smooth*

1. Pendahuluan

Suatu manifold adalah generalisasi dari suatu kurva dan permukaan ke berbagai dimensi yang memberikan konteks matematika untuk memahami ruang dalam semua perwujudannya. Teori manifold sangat diperlukan dalam sebagian besar subbidang matematika murni dan menjadi semakin penting dalam berbagai bidang seperti genetika, robotika ekonometri, statistika, grafis komputer, penggambaran biomedis, dan terutama di bidang *mathematics-theoretical physics*.

Teori manifold telah lama diteliti oleh para ahli matematika terbukti dengan penelitian pada manifold berdimensi 3 oleh matematikawan Perancis Henri Poincarê pada tahun 1895, manifold berdimensi 4 ditemukan oleh Michael Freedman di tahun 1982 dan manifold berdimensi 5 dan lebih tinggi ditemukan oleh Stephen Smale di tahun 1961. [2]

Manifold paling sederhana adalah manifold topologi, yang merupakan ruang topologi dengan sifat-sifat tertentu yang menggambarkan bahwa ruang tersebut secara lokal terlihat seperti $\mathbb{R}^n$. Suatu manifold topologi adalah ruang topologi dengan tiga sifat khusus, yaitu Hausdorrf, mempunyai *countable basis*, dan Euklidis berdimensi n lokal, contohnya kurva dan permukaan. Persyaratan pertama untuk mengubah pemikiran dari kalkulus ke manifold adalah suatu pengertian tentang *smoothness*. Selanjutnya dikenalkan suatu struktur tambahan yang dikatakan *smooth structure*, yang dapat ditambahkan ke manifold topologi yang memungkinkan untuk memahaminya dalam pengertian turunan. [3]

Pada penelitian ini peneliti tertarik untuk menentukan manifold topologi pada ruang Euklidis $\mathbb{R}^n$ yang memiliki sifat-sifat Hausdorff, mempunyai *countable basis* dan Euklidis berdimensi n lokal dan manifold topologi dengan *smooth structure*.

2. Landasan Teori

2.1. *Ruang Metrik*

Salah satu teori yang paling berguna dalam analisis adalah konsep ruang metrik. Dalam mempelajari manifold dan sifat-sifatnya yang dipertahankan dengan homeomorfisma (pemetaan kontinu dengan inversnya kontinu) dapat dipilih dengan melihat manifold sebagai ruang metrik.

Definisi 2.1. [4] *Suatu metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

yang mempunyai sifat sebagai berikut:

(1) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ berlaku jika dan hanya jika $x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$,
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Diberikan suatu metrik d di X, bilangan $d(x, y)$ sering disebut sebagai jarak antara x dan y pada metrik d. Pasangan (X, d) dikatakan suatu ruang metrik.

Contoh 2.2. [1] Misalkan

$$d(a, b) = \left(\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 \right)^{1/2}$$

untuk semua $a = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $b = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$, maka d adalah metrik pada $\mathbb{R}^n$ dan disebut sebagai metrik Euklidis. Ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d)$ disebut sebagai ruang Euklidis berdimensi n (*n-dimensional Euclidean space*).

Bukti. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan Definisi 2.1.
Diberikan $a = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dan $c = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ dengan $x_r, y_r, z_r \in \mathbb{R}$ untuk suatu $r \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

(1) Berdasarkan sifat jarak dua bilangan riil, yaitu $d(x_r, y_r) = |x_r - y_r| \geq 0$ dengan $r \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka diperoleh $\left(\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 \right)^{1/2} \geq 0$.
$(\Rightarrow)$ Misalkan $\left(\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 \right)^{1/2} = 0$ maka $\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 = 0$, untuk suatu $r \in \{1, \cdots, n\}$.
Anggap bahwa $x_r \neq y_r$ untuk setiap $r \in \{1, \cdots, n\}$, ini berarti bahwa $(x_r - y_r)^2 > 0$ sehingga $\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 > 0$. Hal ini kontradiksi bahwa $\sum_{r=1}^{n} (x_r - y_r)^2 = 0$, maka pengandaian salah dan haruslah bahwa $x_r = y_r$

untuk setiap $r \in \{1, \cdots, n\}$.
($\Leftarrow$) Misalkan $x_r = y_r$, $\forall r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ maka

$$\Big(\sum_{r=1}^{n}(x_r - y_r)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{r=1}^{n}(x_r - x_r)^2\Big)^{1/2} = 0.$$

(2) Perhatikan bahwa

$$d(a, b) = \Big(\sum_{r=1}^{n}(x_r - y_r)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{r=1}^{n}(y_r - x_r)^2\Big)^{1/2}$$

Jadi terbukti bahwa $d(a, b) = d(b, a)$.

(3) Misalkan bahwa titik-titik $a = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dan $c = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ adalah berbeda di $\mathbb{R}^n$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\left(\sum_{r=1}^{n}(x_r - z_r)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{r=1}^{n}(x_r - y_r)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{r=1}^{n}(y_r - z_r)^2\right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Misalkan $x_r - y_r = \alpha_r$ dan $y_r - z_r = \beta_r$ maka persamaan (2.1) adalah ekuivalen dengan

$$\left(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r + \beta_r)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2\right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Karena a, b dan c adalah titik-titik berbeda maka $x_r - y_r = \alpha_r \neq 0$ dan $y_r - z_r = \beta_r \neq 0$, sehingga diperoleh $\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2 \neq 0$ dan $\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2 \neq 0$.
Misalkan untuk $r = 1, 2, \cdots, n$, $\lambda_r = \frac{\alpha_r}{\left(\sum_{s=1}^{n}(\alpha_s)^2\right)^{1/2}} \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2 = 1$ dan $\mu_r = \frac{\beta_r}{\left(\sum_{s=1}^{n}(\beta_s)^2\right)^{1/2}} \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}(\mu_r)^2 = 1$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & 0 \le (\lambda_r - \mu_r)^2 = (\lambda_r)^2 - 2\lambda_r\mu_r + (\mu)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \le \sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2 - 2\sum_{r=1}^{n}\lambda_r\mu_r + \sum_{r=1}^{n}(\mu)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \le 2 - 2\sum_{r=1}^{n}\lambda_r\mu_r \end{aligned}$$

maka diperoleh,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{n}\lambda_r\mu_r \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{r=1}^{n}\alpha_r\beta_r \le \big(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2\big)^{1/2}\big(\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2\big)^{1/2} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa persamaan

$$
\begin{aligned}
(p_r+q_r)^2 &= p_r^2+2p_rq_r+q_r^2, \quad \text{dengan } p_r, q_r \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}(p_r+q_r)^2 &= \sum_{r=1}^{n}(p_r)^2+2\sum_{r=1}^{n}p_rq_r+\sum_{r=1}^{n}(q_r)^2 \\
\Leftrightarrow 2\sum_{r=1}^{n}p_rq_r &= \sum_{r=1}^{n}(p_r+q_r)^2-\sum_{r=1}^{n}(p_r)^2-\sum_{r=1}^{n}(q_r)^2. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Misalkan $\alpha_r = p_r$ dan $\beta_r = q_r$, maka dengan menggunakan persamaan (2.3) pada persamaan (2.4) diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\beta_r \le \big(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2\big)^{1/2}\big(\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2\big)^{1/2} \\
\Leftrightarrow\ &2\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\beta_r \le 2\big(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2\big)^{1/2}\big(\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2\big)^{1/2} \\
\Leftrightarrow\ &\big\{\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r+\beta_r)^2\big\}^{1/2} \le \big(\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r)^2\big)^{1/2}+\big(\sum_{r=1}^{n}(\beta_r)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Hal ini menyebabkan persamaan (2.2) terbukti. Jadi terbukti bahwa $\left(\sum_{r=1}^{n}(x_r-z_r)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{r=1}^{n}(x_r-y_r)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{r=1}^{n}(y_r-z_r)^2\right)^{1/2}$.
Karena ketiga sifat metrik terpenuhi maka d adalah metrik pada $\mathbb{R}^n$. □

Definisi 2.3. [1] *Misalkan x adalah suatu titik di X dan r suatu bilangan riil non negatif. Himpunan*

$$B(x,r)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\} \qquad (2.5)$$

dikatakan bola buka dengan pusat x dan jari-jari r.

Definisi 2.4. [1] *Suatu himpuan bagian A dari X dikatakan buka di ruang metrik X jika dan hanya jika untuk setiap titik $x\in A$, terdapat suatu bilangan riil positif r sedemikian sehingga $B(x,r)\subseteq A$.*

2.2. *Ruang Topologi*

Definisi 2.5. [4] *Suatu topologi pada himpunan X adalah suatu koleksi $\mathcal{T}$ dari himpunan bagian dari X yang mempunyai sifat-sifat berikut:*

(1) $\varnothing$ dan X terdapat di $\mathcal{T}$,
(2) Gabungan dari setiap koleksi bagian di $\mathcal{T}$ adalah anggota $\mathcal{T}$,
(3) Irisan dari setiap koleksi bagian berhingga di $\mathcal{T}$ adalah anggota $\mathcal{T}$.

Suatu himpunan X dari suatu topologi $\mathcal{T}$ yang telah ditentukan disebut ruang topologi.

Contoh 2.6. *[3]* Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, norm Euklidis dari x adalah bilangan riil non negatif

$$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2},$$

dan untuk $x, y \in \mathbb{R}^n$, fungsi jarak Euklidis didefinisikan sebagai

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Fungsi jarak ini merubah $\mathbb{R}^n$ menjadi suatu ruang metrik. Topologi metrik yang dihasilkan pada $\mathbb{R}^n$ dikatakan topologi Euklidis.

3. Pembahasan

3.1. *Fungsi Kontinu*

Salah satu hal pentingnya membahas kekontinuan adalah untuk menentukan suatu homeomorfisma. Dari definisi bola buka $B(x, r) = \{x_0 | d(x, x_0) < r\}$ maka pendefinisian fungsi kontinu $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada subbab 2.3 dapat ditulis juga dalam bentuk: untuk setiap bola buka $B(f(x_0), \epsilon)$ terdapat $B(x_0, \delta)$ sedemikian sehingga $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$. [2]

Definisi 3.1. [2] *Misalkan X dan Y adalah ruang topologi, suatu pemetaan $f : X \to Y$ dikatakan kontinu jika untuk setiap himpunan bagian buka $U \subseteq Y$, maka fungsi invers $f^{-1}(U)$ adalah buka di X.*

Definisi 3.2. [4] *Misalkan X dan Y adalah ruang topologi, $f : X \to Y$ adalah suatu bijektif (fungsi satu-satu dan pada). Fungsi f dikatakan suatu homeomorfisma jika kedua fungsi f dan fungsi invers f^{-1} adalah kontinu.*

3.2. *Basis Untuk Topologi*

Definisi 3.3. [4] *Misalkan X adalah himpunan. Suatu basis untuk topologi di X adalah koleksi $\mathfrak{B}$ dari himpunan-himpunan bagian dari X (disebut elemen basis) sedemikian sehingga*

(1) Untuk setiap $x \in X$ terdapat sekurang-kurangnya satu elemen basis B yang memuat x.
(2) Jika x termuat pada irisan dua elemen basis B_1 dan B_2 maka terdapat elemen basis B_3 yang memuat x sedemikian sehingga $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

3.3. *Topologi Subruang*

Definisi 3.4. [4] *Misalkan X adalah suatu ruang topologi dengan topologi $\mathcal{T}$. Jika Y adalah suatu himpunan bagian dari X, maka koleksi*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U | U \in \mathcal{T}\} \tag{3.1}$$

adalah suatu topologi pada Y yang disebut dengan topologi subruang. Dengan topologi ini, Y disebut suatu subruang dari X.

Contoh 3.5. *[2]* Jika $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah suatu himpunan bagian buka dan $f : U \to \mathbb{R}^k$ adalah sebarang pemetaan kontinu, maka suatu grafik dari f adalah himpunan bagian $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ yang didefinisikan sebagai

$$\Gamma(f) = \{(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k) | x \in U \ \ dan \ \ y = f(x)\},$$

adalah suatu homeomorfik pada U dengan topologi subruang di $\mathbb{R}^{n+k}$.

Bukti. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa $\Gamma(f)$ adalah homeomorfik pada U dengan menggunakan Definisi 3.2.
Misalkan $\theta : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ adalah pemetaan injektif kontinu

$$\theta(x) = (x, f(x)).$$

Fungsi θ mendefinisikan suatu bijektif kontinu dari U pada $\Gamma(f)$. Pembatasan terhadap $\Gamma(f)$ dari proyeksi $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ adalah suatu invers kontinu untuk θ, sehingga $\Gamma(f)$ adalah homeomorfik pada U. □

3.4. *Manifold Topologi*

Manifold merupakan generalisasi dari kurva dan permukaan terhadap bi- langan dimensinya. Suatu manifold bisa juga ditulis n-manifold.

Definisi 3.6. [4] *Suatu ruang topologi X dikatakan suatu ruang Hausdorff jika untuk setiap pasangan titik berbeda x_1, x_2 di X, terdapat lingkungan U_1 dan U_2 dari x_1 dan x_2 yang masing-masingnya adalah saling lepas.*

Contoh 3.7. *[2]* Setiap ruang metrik adalah Hausdorff.

Bukti. Misalkan x dan y adalah sebarang titik berbeda di (X, d). Pilih $\epsilon = d(x, y)/2$, diperoleh lingkungan $B(x, \epsilon)$ dan $B(y, \epsilon)$ dari x dan y secara berturut-turut. Anggap bahwa $B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) \neq \varnothing$, maka untuk setiap $z \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon)$ diperoleh

$$d(x, z) + d(z, y) < d(x, y)$$

Ini kontradiksi dengan pertaksamaan segitiga, yaitu $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, maka pengandaian salah dan haruslah $B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \varnothing$. Jadi, terbukti bahwa setiap ruang metrik adalah Hausdorff. □

Definisi 3.8. [4] *Suatu ruang X dikatakan mempunyai suatu countable basis di $x \in X$ jika terdapat suatu koleksi $\mathfrak{B}$ dari lingkungan-lingkungan dari x yang countable sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat sekurang-kurangnya satu anggota di $\mathfrak{B}$.*

Contoh 3.9. Koleksi $\mathfrak{B}_{rat}$ dari setiap bola-bola buka di $\mathbb{R}^n$ dengan pusat rasional dan jari-jari rasional adalah *countable basis* untuk $\mathbb{R}^n$.

Bukti. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan Definisi 3.8.
Diberikan suatu himpunan buka U di $\mathbb{R}^n$ dan titik p di U, terdapat suatu bola buka

$B(p, r')$ dengan jari-jari bilangan riil positif r' sedemikian sehingga $p \in B(p, r') \subset U$. Ambil suatu bilangan rasional r di $(0, r')$ maka $p \in B(p, r) \subset U$, sehingga terdapat suatu titik rasional q dalam bola terkecil $B(p, \frac{r}{2})$. Klaim bahwa

$$p \in B(q, \frac{r}{2}) \subset B(p, r). \tag{3.2}$$

Karena $d(p, q) < r/2$, diperoleh $p \in B(q, r/2)$. Selanjutnya, jika $x \in B(q, r/2)$ maka berdasarkan pertaksamaan segitiga,

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

sehingga $x \in B(p, r)$, persamaan (3.2) terbukti. Karena $p \in B(q, r/2) \subset U$, koleksi $\mathfrak{B}_{rat}$ dari bola-bola buka dengan pusat rasional dan jari-jari rasional adalah suatu countable basis di $\mathbb{R}^n$ dengan topologi metriknya. □

Definisi 3.10. [4] *Suatu n-manifold X adalah ruang Hausdorff dengan suatu countable basis sedemikian sehingga untuk setiap titik x di X mempunyai suatu lingkungan yang homeomorfik dengan suatu himpunan bagian buka dari* $\mathbb{R}^n$ *(Euklidis berdimensi n lokal).*

Definisi 3.11. [3] *Misalkan M adalah n-manifold topologi. Suatu koordinat chart (atau chart) pada M adalah suatu pasangan* (U, φ)*, dimana U adalah suatu himpunan bagian buka dari M dan* $\varphi : U \to \hat{U}$ *adalah suatu homeomorfisma dari U ke himpunan bagian buka* $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

Contoh 3.12. *(Grafik Fungsi Kontinu). [3]* Misalkan $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah suatu himpunan bagian buka dan $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ adalah fungsi kontinu. Grafik dari f adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k |\ x \in U \text{ dan } y = f(x)\},$$

dengan topologi subruang. Misalkan $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ menyatakan proyeksi pada faktor pertama dan misalkan $\varphi : \Gamma(f) \to U$ adalah suatu pemetaan pembatasan π_1 pada $\Gamma(f)$:

$$\varphi(x, y) = x, \qquad (x, y) \in \Gamma(f).$$

Bukti. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan Definisi 3.10.
Berdasarkan Contoh 3.5 maka φ adalah homeomorfisma. Misalkan $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k}$ maka terdapat suatu lingkungan V dari (x, y). Karena φ adalah suatu homeomorfisma dari $\Gamma(f)$ pada U, dimana $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan bagian buka, maka $\Gamma(f)$ adalah suatu Euklidis berdimensi n lokal. Karena setiap ruang metrik adalah Hausdorff dan setiap ruang Euklidis $\mathbb{R}^n$ adalah *countable basis* maka $\Gamma(f)$ adalah manifold topologi berdimensi n. Maka $(\Gamma(f), \varphi)$ adalah koordinat *chart.* □

3.5. *Manifold Smooth*

Suatu manifold *smooth* adalah ruang topologi yang diselimuti oleh suatu koleksi dari *chart* lokal.

Definisi 3.13. [3] *Misalkan U dan V adalah himpunan-himpunan bagian buka dari ruang Euklidis $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$ secara berturut-turut. Suatu fungsi $f : U \longrightarrow V$ dikatakan smooth jika untuk setiap anggota fungsi f memiliki turunan parsial yang kontinu pada semua pangkat (orde).*

Definisi 3.14. [3] *Misalkan U dan V adalah himpunan-himpunan bagian buka dari ruang Euklidis. Suatu fungsi $f : U \to V$ dikatakan suatu diffeomorfisma jika f adalah smooth dan bijektif dan fungsi inversnya juga smooth.*

Definisi 3.15. [3] *Misalkan M adalah n-manifold topologi. Jika (U, φ), (V, ψ) adalah dua chart sedemikian sehingga $U \cap V \neq \varnothing$, maka pemetaan komposisi $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ dikatakan pemetaan transisi dari φ ke ψ. Pemetaan transisi $\psi \circ \varphi^{-1}$ adalah suatu komposisi dari dua homeomorfisma maka pemetaan transisi itu sendiri adalah suatu homeomorfisma.*

Definisi 3.16. [3] *Dua chart (U, φ) dan (V, ψ) dikatakan smoothly compatible jika $U \cap V = \varnothing$ atau pemetaan transisi $\psi \circ \varphi^{-1}$ adalah suatu diffeomorfisma.*

Definisi 3.17. [3] *Suatu atlas untuk M adalah suatu koleksi dari chart yang domainnya menyelimuti M. Suatu atlas $\mathcal{A}$ dikatakan suatu smooth atlas jika dua chart sebarang di $\mathcal{A}$ adalah smoothly compatible satu sama lainnya.*

Definisi 3.18. [3] *Suatu smooth atlas $\mathcal{A}$ pada M adalah maksimal jika smooth atlas $\mathcal{A}$ tidak termuat secara tepat dalam setiap smooth atlas yang lebih besar.*

Definisi 3.19. [3] *Misalkan M adalah manifold topologi, maka suatu smooth structure di M adalah maksimal atlas smooth. Suatu manifold smooth adalah pasangan $(M, \mathcal{A})$, dimana M adalah manifold topologi dan $\mathcal{A}$ adalah smooth structure di M. Setiap chart (U, φ) termuat dalam smooth atlas maksimal yang diberikan dikatakan suatu smooth chart dan pemetaan koordinat φ yang sesuai dikatakan suatu pemetaan koordinat yang smooth.*

Contoh 3.20. *(Grafik Fungsi Smooth). [3]* Jika $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan bagian buka dan $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ adalah fungsi *smooth*.

Bukti. Berdasarkan Contoh 3.12 akan ditunjukkan bahwa grafik fungsi f adalah suatu manifold *smooth*. Diketahui bahwa grafik f adalah suatu n-manifold topologi pada topologi subruang. Karena $\Gamma(f)$ yang dise-limuti oleh grafik koordinat *chart* tunggal $\varphi : \Gamma(f) \longrightarrow U$ (pembatasan dari π_1), dapat dikatakan suatu *smooth structure* pada $\Gamma(f)$ dengan menyatakan grafik koordinat *chart* $(\Gamma(f), \varphi)$ menjadi suatu *smooth chart.* □

4. Kesimpulan

Suatu manifold *smooth* M adalah manifold topologi yang dilengkapi dengan suatu *smooth structure*. Jika $U \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah buka dan $f : U \to \mathbb{R}^k$ adalah kontinu, maka grafik dari f yang didefinisikan oleh

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k |\ x \in U \text{ dan } y = f(x)\},$$

dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}^{n+k}$ adalah suatu manifold topologi berdimensi n. Grafik $\Gamma(f)$ adalah manifold *smooth* apabila ditambahkan *smooth structure* $\varphi : \Gamma(f) \to U$, dimana φ bersifat homeomorfisma.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Des Welyyanti, Ibu Dr. Shelvi Ekariani dan Ibu Riri Lestari, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Brown A. dan A. Page. 1970. *Elements of Functional Analysis.* Van Nostrand Reinhold Company, London.
[2] Lee, John M.. 2010. *Introduction to Topological Manifold Second Edition.* Springer, New York.
[3] Lee, John M.. 2013. *Introduction to Smooth Manifold Second Edition.* Springer, New York.
[4] Munkers, James R.. 2000. *Topology Second Edition.* Prentice Hall, Inc, New Jersey (US).