JURNAL MATEMATIKA UNAND

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163
Telp. 0751-73224, Hp. 0852-64652866
http://jmua.fmipa.unand.ac.id

DAFTAR ISI
VOLUME VII No 1

Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **1** Hal. 59 – 63
ISSN : 2303–2910

PENENTUAN BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI AMALGAMASI GRAF RODA

HARY WAHYUDI, NARWEN

Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : harywy@yahoo.com

Abstrak. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi di graf G terhubung tak trivial didefinisikan sebagai $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ adalah pewarnaan sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga boleh berwarna sama. Terdapat u dan v di $V(G)$ dan P adalah lintasan dari u ke v. Graf P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat *rainbow path* antara u dan v. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan *rainbow coloring* di G. Jika terdapat k warna di G maka c adalah *rainbow k-coloring.* Nilai minimum k sehingga terdapat *rainbow k-coloring* di G disebut dengan bilangan *rainbow connection*, ditulis $rc(G)$. Penelitian ini menentukan bilangan *rainbow connection* dari amalgamasi graf roda, $rc(Amal(W_n, t, v_{i0}))$, dimana graf $Amal(W_n, t, v_{i0})$ adalah graf yang berasal dari hasil penyatuan titik sebanyak t, yang masing-masingnya diambil dari satu titik pusat W_n, dan v_{i0} menyatakan titik yang menjadi hasil amalgamasi, seperti yang telah dibahas dalam [6].

Kata Kunci: Amalgamasi, Graf Roda, Rainbow Path, Rainbow Connected, Bilangan Rainbow Connection

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu ilmu yang dibahas dalam matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi. Suatu graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan tak kosong V yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan E yang elemen-elemennnya disebut sisi. Topik dalam teori graf yang menarik dan sedang banyak dikembangkan seperti pelabelan graf *(graf labeling)* dan pewarnaan graf *(graf coloring).* Salah satu topik yang akan dibahas disini adalah pewarnaan graf.

Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial. Definisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ dengan $k \in \mathbb{N}$, dimana sisi G yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu lintasan-(u, v) di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi pada lintasan yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path.*

Misalkan terdapat suatu graf terhubung G_i, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$, dengan $t \in \mathbb{N}$. Untuk $t \geq 2$, misalkan $\{G_1, G_2, \cdots, G_t\}$ adalah koleksi graf dan setiap graf G_i mempunyai suatu titik terminal, dinotasikan v_{0i}, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Graf $Amal(G_i, t, v_{i0})$ adalah graf yang berasal dari hasil penyatuan sebanyak t titik terminal dari graf G_i, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$.

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai bilangan *rainbow connection* dari amalgamasi t buah graf roda, dinotasikan $G \simeq Amal(W_n, t, v_{i0})$, untuk $n \geq 3$ dan $t \geq 2$, dengan titik terminalnya adalah titik pusat dari masing-masing graf roda W_n, seperti telah dibahas dalam [6].

2. Teori Pendukung

Pada suatu graf terhubung G terdapat hubungan $diam(G), rc(G), src(G)$ dan banyak sisi m, seperti dijelaskan pada proposisi berikut.

Proposisi 2.1. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m. Jika $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan pewarnaan* rainbow coloring*, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Misalkan terdapat graf terhubung G_i, dengan $1 \leq i \leq t$, $t \geq 2$. Notasikan titik v_{i0} sebagai suatu titik terminal di setiap graf G_i. Pandang Teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.2. [4] *Jika G adalah amalgamasi dari $G_1, G_2, \cdots, G_t$, dinotasikan $Amal(G_i, v_{i0})$, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq \sum_{i=1}^{t} rc(G_i).$$

Bukti. Berdasarkan Proposisi 2.1, jelas bahwa $diam(G) \leq rc(G)$. Notasikan c'_i sebagai pewarnaan *rainbow* dari graf G_i. Definisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, \sum_{i=1}^{t} rc(G_i)\}$ sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} c'_1(e), & e \in E(G_1), \\ c'_q(e) + \sum_{p=1}^{q-1} rc(G_p), & e \in E(G_q),\ q \in \{2, 3, \cdots, t\}. \end{cases}$$

Pandang dua titik $u, w \in V(G)$. Perhatikan dua kasus berikut.
Kasus 1. $u, w \in V(G_j)$ untuk $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$.
Terdapat *rainbow path* $u - w$ dengan pewarnaan c yang bersesuaian dengan pewarnaan c'_j.
Kasus 2. $u \in V(G_j)$ dan $w \in V(G_k)$ untuk setiap j dan k di $\{1, 2, \cdots, t\}$ dengan $j \neq k$.
Terdapat *rainbow path* $u - v$ pada pewarnaan c'_j dan *rainbow* $v - w$ pada pewarnaan c'_k, dimana v adalah titik di G yang merupakan hasil identifikasi semua titik terminal v_{0i} di setiap G_i. Akan diperoleh suatu rainbow path $u - w$ dengan mengidentifikasi titik v dari $u - v$ path dan $v - w$ path, karena kedua lintasan tersebut menggunakan warna yang berbeda.
Diperoleh bahwa c adalah pewarnaan *rainbow*. Dengan demikian, $rc(G) \leq \sum_{i=1}^{t} rc(G_i)$. □

3. Bilangan *Rainbow Connection* untuk Amalgamasi Graf Roda

Teorema 3.1. [4] *Misalkan n dan t adalah dua bilangan bulat positif dengan $n \geq 4$ dan $t \geq 2$. Misalkan $G \simeq Amal(W_n, t, v_{i0})$ dimana untuk setiap $\{1, 2, \cdots, t\}$, G_i*

adalah graf roda W_n dengan $n+1$ titik. Jika v_{i0} untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$ adalah titik pusat dari graf roda W_n, maka

$$rc(G) = \begin{cases} 3, n \geq 5 \ dan \ t \geq 2, \ atau \ n = 4 \ dan \ t \geq 3, \\ 2, n = 4 \ dan \ t = 2. \end{cases}$$

Bukti. Didefinisikan:

$V(G) = \{v\} \cup \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq t, \ 1 \leq j \leq n\}$,
$E(G) = \{vv_{i,j} | 1 \leq i \leq t, \ 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{i,k}v_{i,k+1} | 1 \leq i \leq t, \ 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{v_{i,1}v_{i,n}\}$.

Pembuktian dilakukan dalam tiga kasus.
Kasus 1. Untuk $n = 4$ dan $t = 2$.
Akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \geq 2$ dan $rc(G) \leq 2$.

(i) Karena $diam(G) = 2$ untuk $G \simeq Amal(W_4, 2, v_{i0})$, maka $2 \leq rc(G)$.
(ii) Definisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$c(vv_{1,j}) = c(v_{1,k}v_{1,k+1}) = c(v_{1,1}v_{1,4}) = c(v_{2,2}v_{2,3}) = 1,$$
$$c(vv_{2,j}) = c(v_{2,k}v_{2,k+1}) = c(v_{2,1}v_{2,4}) = c(v_{1,2}v_{1,3}) = 2,$$

dimana $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $k \in \{1, 2\}$. Akan terdapat *rainbow path* di antara setiap dua titik di G. Jadi c adalah *rainbow coloring* sehingga $rc(G) \leq 2$.

Kasus 2. Untuk $n = 4$ dan $t \geq 3$.
Akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$.

(i) Asumsikan $rc(G) \leq 2$ untuk $t \geq 3$. Karena $diam(G) = 2$, maka $rc(G) \geq 2$. Misalkan terdapat pewarnaan dengan 2 warna terhadap G. Maka akan diperoleh dua titik yang tidak memuat rainbow path di antaranya. Maka haruslah $rc(G) \geq 3$.
(ii) Definisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut.

$$c(vv_{i,j}) = \begin{cases} 1, j \text{ ganjil}, \\ 2, j \text{ genap}. \end{cases}$$
$$c(v_{i,k}v_{i,k+1}) = c(v_{i,1}v_{i,n}) = 3, \ 1 \leq i \leq t, \ 1 \leq j \leq n, \ 1 \leq k \leq n-1.$$

Berarti ada dua titik $x, y \in V(G)$ (dengan $d(x, y) \leq 2$). Jika $d(x, y) = 1$ maka terdapat rainbow path $x - y$, yaitu sisi xy. Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = v_{k,l}$ untuk suatu i dan k di $\{1, 2, \cdots, k\}$ dengan $i \neq k$ dan untuk suatu j, l di $\{1, 2, \cdots, n-1\}$.

(a) Jika j dan l berbeda, maka terdapat *rainbow path* $x - y$, yaitu x, v, y.
(b) Jika j dan l sama, maka terdapat *rainbow path* $x - y$, misalkan $x, v, v_{k,l-1}, y$ untuk $l \geq 2$ dan $x, v, v_{k,l+1}, y$ untuk $l = 1$.

Misalkan $x = v$ dan $y = v_{i,j}$, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$ dan $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ maka terdapat *rainbow path* $x - y$, yaitu sisi xy. Jika Misalkan $x = v_{i,j}$ dan $y = v_{i,k}$ untuk setiap j dan $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ dengan $j \neq p$.

(a) Jika j dan k berbeda, maka terdapat *rainbow path* $x - y$, yaitu x, v, y.

(b) Jika j dan k sama, maka terdapat *rainbow path* $x - y$, yaitu $x, v, v_{i,k-1}, y$ untuk $k \geq 2$ dan $x, v, v_{i,k+1}, y$ untuk $k = 1$.

Jadi, c adalah *rainbow coloring*, dengan $rc(G) \leq 3$ untuk $n = 4$ dan $t \geq 3$.

Kasus 3. Untuk $n \geq 5$ dan $t \geq 2$.
Akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$.

(i) Karena $diam(G) = 2$, maka $rc(G) \geq 2$. Misalkan c' adalah *rainbow 2-coloring* di G. Terdapat dua titik $v_{i,j}$ dan $v_{p,q}$ di G untuk setiap i dan $p \in \{1, 2, \cdots, t\}$ dengan $i \neq p$, dan untuk setiap j dan $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Karena terdapat satu *path* P yang panjangnya adalah 2 antara $v_{i,j}$ dan $v_{p,q}$, maka setiap sisi di *path* ini harus memiliki warna berbeda. Misalkan $c'(v_{i,j}v) = 1$ dan $c'(vv_{p,q}) = 2$. Berarti $c'(vv_{p,r}) = 2$ dimana $r \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{q\}$, dan $c'(v_{i,k}v) = 1$ dimana $k \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j\}$.
Karena ada yang tidak mempunyai *rainbow path* antara dua titik yang sama di W_n yang melalui titik v, haruslah melalui *cycle* C_n yang terdapat di W_n.

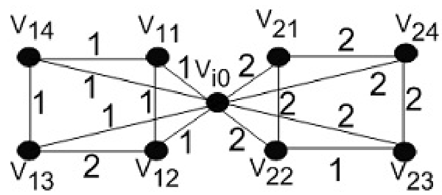
(a) **Kondisi 1**. $n = 5$.
Misalkan $c'(v_{i,1}v_{i,2}) = c'(v_{i,1}v_{i,5}) = 1$. Haruslah $c'(v_{i,2}v_{i,3}) = c'(v_{i,4}v_{i,5}) = 2$. Berarti untuk $v_{i,2}$ dan $v_{i,5}$ tidak terdapat *rainbow path*, ini kontradiksi dengan pemisalan sebelumnya.

(a) **Kondisi 2**. $n \geq 6$.
Diketahui $diam \geq 3$. Berarti untuk dua titik $v_{i,j}$ dan $v_{i,j+3}$ tidak terdapat *rainbow path* dimana $j \in \{1, 2, \cdots, n-3\}$, ini berarti kontradiksi dengan pemisalan sebelumnya.

Jadi, $rc(G) \geq 3$ dimana $n \geq 5$ dan $t \geq 2$.

(ii) Pembuktian sama dengan Kasus 2(ii). □

Pewarnaan untuk $Amal(W_4, 2, v_{i0})$ dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Pewarnaan $G \simeq Amal(W_4, 2, v_{i0})$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dikaji kembali tentang bilangan *rainbow connection* dari amalgamasi graf roda W_n, untuk $n \geq 3$ sebagai berikut. Jika terdapat graf $G \simeq Amal(W_n, t, v_{i0})$, dengan $n \geq 4$, $t \geq 2$, dan v_{i0} untuk $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$ adalah titik pusat dari graf roda W_n, maka

$$rc(G) = \begin{cases} 3, n \geq 5 \text{ dan } t \geq 2, \text{ atau } n = 4 \text{ dan } t \geq 3, \\ 2, n = 4 \text{ dan } t = 2. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A dan U.S.R. Murty. 2008. *Introduction to Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York.

[2] Carlson, K. 2006. Generalized Books and C_m-snakes are Prime Graphs, *Ars Combin.* 215 – 221.

[3] Chartrand, G. dan Ping Zhang. 2008. *Chromatic Graph Theory*, Chapman and Hall.

[4] Chartrand, G., Kalamazoo, G.L.Johns,S Valley dan K.A. McKeon. 2006. *Rainbow Connection in Graph.* London.

[5] Chartrand, G.dkk. 2008. Rainbow Connection in Graph, *Math.Bohem.* **133**: 85 – 98.

[6] Fitriani, D. dan A.N.M. Salman. 2016. Rainbow Connection of Amalgamation of Some Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* **13**. 90 – 99.

[7] Li, X. dan Sun, Y.2012. *Rainbow Connection of Graphs*. Springer, New York.

[8] Li, X. dan Sun, Y.2012. Rainbow Connection of Graphs : A Survey, *Graph Combin* **29**(1): 1 – 38.

[9] Sy. Syafrizal, G.H. Medika and L. Yulianti. 2013. The Rainbow Connection of Fan and Sun, *Appl.Math.Sci.* 3155 – 3160.