LAPORAN AKHIR
PELAKSANAAN PENELITIAN TOPIK UNGGULAN DOSEN DENGAN MELIBATKAN MAHASISWA S2/S3
TAHUN ANGGARAN 2016

KAJIAN EKSISTENSI KEPUTUSAN OPTIMAL MASALAH OPTIMASI DINAMIS KUADRATIK LINIER POSITIF TIDAK STABIL

1. **Dr. Muhafzan** **NIDN. 0002066712 (Ketua)**
2. **Syafrida Wirma Yenti, S.Pd** **NBP. 1520432008 (Anggota)**

Dibiayai oleh Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan
Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi
sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian
Nomor: 666/XIII/A/Unand/2016
Tanggal 17 Februari 2016

UNIVERSITAS ANDALAS

November 2016

HALAMAN PENGESAHAN

Judul	:	Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Positif Tidak Stabil
Peneliti/Pelaksana		
Nama Lengkap	:	Dr. Muhafzan
NIDN	:	0002066712
Jabatan Funsional	:	Lektor Kepala
Program Studi	:	Matematika
Nomor HP	:	08126868108
Alamat (e-mail)	:	muhafzan@fmipa.unand.ac.id; muhafzan@gmail.com
Anggota	:	Syafrida Wirma Yenti, S. Pd
NIDN/No. Mahasiswa	:	1520432008
Perguruan Tinggi	:	Universitas Andalas
Penanggung Jawab	:	Dr. Muhafzan
Tahun Pelaksanaan	:	Tahun ke dari rencana 1 tahun
Biaya Keseluruhan	:	Rp. 50.000.000,-
No. Kontrak	:	666/XIII/A/Unand/2016

Mengetahui
Dekan FMIPA Unand,

Prof. Dr. Mansyurdin, M.S.
NIP. 196002131987031005

Padang, 14 November 2016
Ketua,

Dr. Muhafzan
NIP. 196706021993021001

Mengetahui

Ketua Lembaga Penelitian dan Pengabdian
Pada Masyarakat Universitas Andalas

Dr. Ing. Uyung Gatot S. Dinata, MT
NIP. 196607091992031003

RINGKASAN

Pada penelitian ini dikaji eksistensi keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif tidak stabil, baik secara analitik maupun secara numerik. Kajian ini melanjutkan studi yang telah dilakukan oleh Laabissi, dkk. (2006), Beauthier dan Winkin (2010), Muhafzan (2010, 2013) dengan asumsi ketidakstabilan pada konstrain model dinamis. Kajian analitik untuk mendapatkan keputusan optimal bagi masalah optimasi kuadratik linier positif tersebut menggunakan prinsip Maksimum, sedangkan kajian numerik menggunakan metode Runge Kutta. Hasil-hasil analitik yang diperoleh nantinya akan dibandingkan dan divalidasi dengan hasil-hasil numerik.

Kajian tentang topik ini menjadi penting dan menarik untuk dipelajari, mengingat potensi aplikasi yang dimiliki oleh model optimasi ini. Beberapa studi melaporkan bahwa model optimasi dinamis ini sangat baik dalam mendeskripsikan berbagai fenomena nyata yang saat ini menjadi topik hangat, di antaranya model pertumbuhan ekonomi, model penyebaran wabah penyakit dan model-model dalam keteknikan.

Luaran yang dicapai dalam penelitian ini adalah makalah yang sudah diseminarkan dalam forum ilmiah internasional, yaitu International Conference on Education, Mathematics and Science 2016 in conjunction with 4th International Postgraduate Conference on Science and Mathematics 2016 (ICEMS2016 in conjunction IPCSM2016) yang diselenggarakan di Universiti Pendidikan Sultan Idris, Malaysia dengan judul makalah: " Linear Quadratic Optimization for Positive LTI System". Selain itu suatu artikel ilmiah berjudul "**A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System**" telah disubmit ke suatu jurnal internasional yang terindeks di Scopus, yaitu Jurnal of Applied Mathematics, dan saat ini dalam status under review. Harapannya, artikel ini dapat diterima untuk dipublikasikan dalam jurnal tersebut sehingga kedepan dapat mengundang peneliti lain untuk merancang implementasi dari teori yang dikembangkan dalam artikel tersebut.

PRAKATA

Kami bersyukur kehadirat Allah SWT bahwa laporan akhir Penelitian Topik Unggulan Dosen dengan Melibatkan Mahasiswa S2/S3 berjudul **Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Positif Tidak Stabil** dapat kami selesaikan sesuai dengan jadwal yang telah ditentukan. Untuk itu pada kesempatan ini kami ucapkan banyak terima kasih khususnya kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Andalas yang telah memberikan dana telah memfasilitasi semua keperluan peneliti sehingga kegiatan penelitian ini dapat dilaksanakan sesuai dengan rencana yang telah dibuat. Selain dari pada itu, kami sampaikan juga ucapan terima kasih kepada Dekan FMIPA Universitas Andalas dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan dukungan baik secara moril maupun materil sehingga pelaksanaan penelitian berjalan lancar tanpa kendala apapun.

Laporan ini merupakan laporan akhir dari satu tahun jangka waktu penelitian yang kami ajukan untuk tahun anggaran 2016. Sebagai manusia yang memiliki banyak kekurangan tentu laporan penelitian ini masih banyak yang harus disempurnakan. Oleh karena itu kami harapkan saran dan kritik dari pembaca untuk memberikan masukan demi kesempurnaan laporan ini.

Demikian prakata laporan akhir kemajuan penelitian ini kami sampaikan, atas perhatian, kritik dan saran, sebelumnya kami ucapkan terima kasih.

Padang, 14 November 2016
Peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah optimasi dinamis merupakan suatu model optimasi dimana pengambilan keputusan sangat bergantung secara kontinu kepada variabel waktu. Model optimasi dinamis ini sering muncul dalam berbagai aplikasi penting dan bermanfaat, beberapa diantaranya dapat dijumpai pada model pertumbuhan ekonomi berkelanjutan (Herbert and Richard, 2007), model ekonomi multi sektor (Jin, 2011), model penyebaran beberapa penyakit menular seperti yang dilaporkan oleh Singo, dkk.(2006) dan Athithan, dkk.(2015).

Masalah optimasi dinamis kuadratik linier merupakan merupakan suatu varian dari masalah optimasi dinamis dimana index performance berbentuk integral dari suatu fungsi kuadratik dan konstrainnya berbentuk sistem dinamis linier. Dewasa ini, aplikasi dari model optimasi dinamis kuadratik linier juga telah meluas ke berbagai bidang, terutama dalam bidang ekonomi (Engwerda dan Salmah, 2009), keteknikan (Ahn dan Mitchell, 2001; Bartek dan Edward, 2010), biologi (Allegrettoa, dkk. 2011) dan lainnya.

Mengingat aplikasi yang menjanjikan tersebut, masalah optimasi dinamis kuadratik linier menjadi salah satu topik terpopuler yang masih hangat dikaji oleh para peneliti sampai sekarang, baik dalam kerangka teoritis maupun aplikatif. Dalam perkembangannya, objek kajian terhadap model yang awalnya bersifat konservatif ini, kemudian diperluas ke kasus-kasus yang lebih realistik, di antaranya adalah dengan memperkenalkan berbagai varian dan penambahan konstrain-konstrain baru. Dalam penelitian ini konstrain dari masalah optimasi dinamis tersebut diasumsikan positif dan tidak stabil

Masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif ini menjadi menarik untuk dikaji karena ia memiliki karakter khusus pada performance index dan konstrainnya. Kefleksibilitas dari performance indeks dan konstrainnya yang berupa sistem persamaan diferensial linier orde satu tersebut menjadikannya sebagai abstraksi model matematika dari berbagai persoalan nyata. Fenomena ini sangat penting dalam pengembangan ilmu ekonomi, keteknikan dan bidang lainnya, khususnya untuk pengambilan keputusan.

1.2 Masalah yang Akan Diteliti

Eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif merupakan objek masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini. Dalam hal ini, permasalahan dibatasi pada konstrain sistem dinamis yang positif dan tidak stabil. Penelitian ini merupakan pengembangan dari hasil-hasil penelitian terdahulu yang sudah dilakukan oleh Laabissi, dkk. (2006), Beauthier dan Winkin (2010), Muhafzan (2010) dan Muhafzan, dkk. (2013). Ruang lingkup kajian meliputi pendekatan analitik dan numerik dari eksistensi keputusan optimal.

1.3 Temuan yang Ditargetkan

Temuan yang ditargetkan pada penelitian ini adalah berupa teori-teori dasar yang menjelaskan eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif dengan asumsi bahwa konstrain sistem dinamis (1) adalah tidak stabil. Hasil ini nantinya merupakan generalisasi dari hasil yang diperoleh oleh Laabissi, dkk. (2006) dan Beauthier dan Winkin (2010). Hasil-hasil tersebut diharapkan dapat diseminasikan dalam forum ilmiah nasional dan internasioanl serta dipublikasikan pada jurnal internasional bereputasi.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Optimasi Kuadratik Linier

Diberikan model dinamis berikut:

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t) + B\omega(t) + D\zeta(t),\ \phi(0) = \phi_0,\ t \geq 0$$
$$\psi(t) = C\phi(t) + E\zeta(t) \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ D \in \mathbb{R}^{n\times r},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n}, E \in \mathbb{R}^{p\times r},\quad \phi \in \mathbb{R}^n$ adalah variable keadaan, $\omega \in \mathbb{R}^m$ adalah variabel keputusan (input), $\zeta \in \mathbb{R}^r$ adalah variabel gangguan, $\psi \in \mathbb{R}^p$ adalah variabel output dan *t* menyatakan waktu. Dalam hal ini simbol $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $m \times n$, dan $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas *n* komponen.

Dalam Naidu (2003) dinyatakan bahwa masalah optimasi dinamis kuadratik linier merupakan masalah penentuan keputusan optimal ω yang memenuhi sistem dinamis (1) dan meminimumkan *performance index* kuadratik berikut:

$$J(u) == \int_0^\infty (\psi^T(t)\psi(t) + \omega^T(t)R\omega(t))dt, \tag{2}$$

dimana *R* adalah matriks simetris definit positif. Dengan pengertian ini dapat dilihat bahwa dengan batasan-batasan tertentu terdapat tak berhingga banyaknya keputusan ω yang dapat memenuhi sistem dinamis (1) dan setiap keputusan tersebut akan memberikan suatu nilai terhadap *performance index* (2). Dari model (1) dan *performance index* (2) juga diperoleh bahwa bila variabel keputusan ω divariasikan seiring dengan perubahan waktu, maka akan mengakibatkan perubahan terhadap keadaan ϕ dan output ψ dan tidak ada batasan apakah nilai fungsi ϕ dan ψ tersebut positif atau negatif.

Baru-baru ini, Benvenuti dan Farina (2002) mendefinisikan kepositifan dari sistem (1) dan mendapatkan hasil-hasil baru. Sistem (1) dikatakan positif jika untuk semua syarat awal $\phi_0 \in \mathbb{R}^n_+$, untuk semua gangguan $\zeta \in \mathbb{R}^r_+$ dan untuk semua keputusan $\omega \in \mathbb{R}^m_+$ mengakibatkan $\phi \in \mathbb{R}^n_+$ dan $\psi \in \mathbb{R}^p_+$ untuk semua $t \geq 0$. Dengan hasil-hasil tentang kepositifan ini, Laabissi, dkk. (2006) memperluas masalah optimasi dinamis kuadratik linier dengan batasan kepositifan pada konstrain dinamis (1). Masalah ini kemudian disebut sebagai masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif.

2.2 Review dan Perkembangan Studi Sebelumnya

Eksistensi dari keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier merupakan suatu kajian yang telah lama dilakukan. Penjelesan-penjelasan mengenai hal ini dapat dijumpai dalam Naidu (2003). Namun demikian kajian mengenai masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif masih relatif baru dan masih hangat dikaji oleh para peneliti sampai sekarang, baik dalam kerangka teoritis maupun aplikatif. Kajian ini dimulai dengan dikembangkannya sistem dinamis positif oleh Benvenuti dan Farina (2002) yang mendapatkan kriteria tentang kepositifan dari sistem dinamis (1). Kriterianya adalah, sistem dinamis (1) adalah positif jika dan hanya jika matriks A adalah Metzler dan matriks B, C, D dan E adalah non negatif.

Dengan dikembangkannya masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif oleh Laabissi pada tahun 2006, penelitian tentang topik ini mulai berkembang. Namun demikian perkembangannya agak lambat karena kesulitan dalam mengkonsruksi keputusan optimal yang disebabkan oleh adanya konstrain kepositifan pada sistem dinamis (1) tersebut. Tahun 2010, Beauthier dan Winkin mendapatkan keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif untuk jangka waktu berhingga dengan bantuan prinsip maksimum dan asumsi bahwa sistem (1) adalah stabil. Aplikasi terbaru dari masalah optimasi ini dikemukakan oleh Roszak dan Davison (2014) yang mendapatkan keputusan optimal untuk kasus penjejakan sinyal dan penolakan sinyal gangguan. Namun demikian hasil ini juga berdasarkan pada asumsi bahwa konstrain dinamisnya adalah stabil.

BAB 3
TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengkaji syarat perlu dan syarat cukup yang menjamin eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif tak stabil.
2. Mengembangkan pendekatan analitik dan pendekatan numerik terhadap perilaku keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif tak stabil tersebut.

3.2 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat dalam memberikan penjelasan teoritis tentang eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier positif tak stabil. Disamping itu, penelitian ini juga penting dalam tinjauan aplikatif mengingat potensi realisasinya sebagai alat bantu pengambilan keputusan dalam berbagai bidang, salah satunya bidang pertumbuhan ekonomi. Lebih lanjut, keterlibatan mahasiswa S2 dalam penelitian ini tentunya akan berdampak pada peningkatan mutu dan kemutakhiran penelitian di institusi program studi.

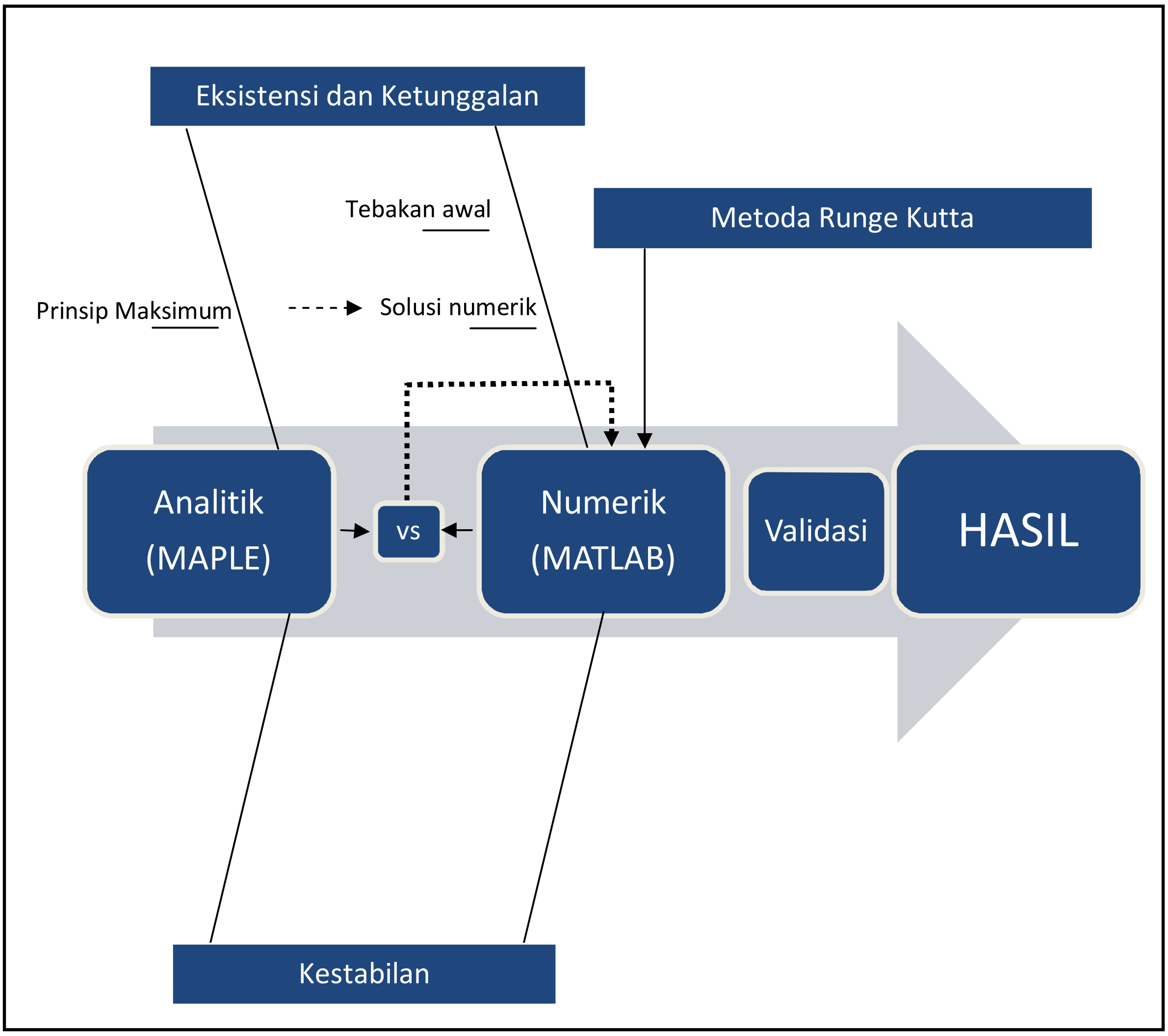
BAB 4
METODE PENELITIAN

Sebagai langkah awal penelitian, akan dikonstruksi syarat perlu dan cukup agar konstrain sistem dinamis positif (1) dapat distabilkan. Selanjutnya, melakukan pendefinisian Hamiltonian dari masalah optimasi kuadratik linier positif yang dilanjutkan dengan penggunakan prinsip Maksimum . Dengan menggunakan prinsip Maksimum ini dilakukan kajian analitik untuk mendapatkan keputusan optimal bagi masalah optimasi kuadratik linier positif. Dalam analisis ini diperlukan bantuan software MAPLE. Aplikasi tersebut diperlukan karena rumitnya persamaan yang akan diselesaikan nantinya. Langkah selanjutnya adalah mengkaji ketunggalan dari keputusan optimal tersebut. Kajian ini diperlukan agar keputusan optimal hanyalah berupa keputusan tunggal.

Langkah selanjutnya adalah melakukan perhitungan numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta. Hasil-hasil numerik nantinya akan dijadikan sebagai pembanding dalam memeriksa kesahihan keputusan optimal. Untuk perhitungan numerik dilakukan dengan menggunakan aplikasi MATLAB yang memiliki beberapa keunggulan dalam hal visualisasi dan animasi hasil. Tentunya komputer yang memiliki performa yang baik dalam mensupport aplikasi Mapple dan MATLAB tersebut sangat dibutuhkan.

Terakhir, seluruh hasil yang diperoleh pada tahap-tahap sebelumnya disimpulkan secara global. Hal ini termasuk penelaahan dan perbandingan hasil dengan kasus-kasus lain yang sudah dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya.

Secara keseluruhan, alur penelitian yang diusulkan dalam proposal ini dideskripsikan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Diagram alir penelitian

BAB V
HASIL YANG DICAPAI

Given the following linear time invariant (LTI) system

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + E\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + F\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ is the output vector, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ is the input vector, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^q$ is disturbance vector, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$ and $F \in \mathbb{R}^{r\times q}$. The system (1) is called positive if for each nonnegative initial state, nonnegative input and nonnegative disturbance imply the state and output are nonnegative for every nonnegative time, i.e. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ and $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r_+$ for every $t \in \mathbb{R}_+$. It is well known that system (1) is positive if and only if A is a Metzler matrix, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}_+$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}_+$ and $F \in \mathbb{R}^{r\times q}_+$ (Benvenuti and Farina, 2002). The characterization of positive systems attracts interest because this kind of system appears in the modelling of many processes in various field, e.g. in biology, chemistry and economics (Jacquez and Simon, 1993; Leenheer and Aeyels, 2001). In these models state variables represent population, measure, mass, etc., and therefore, they are nonnegative. Many aspects of positive linear systems have been considered by different authors. A complete introduction to positive linear systems can be found in Farina and Rinaldi (Benvenuti and Farina, 2002). Stability of the positive linear system has been studied in Leenheer and Aeyels (2001). It turns out that system (1) is asymptotic stable if and only if A is Hurwitz, namely, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ for all $\lambda \in \sigma(A)$.

Recently, Wu, et al. (2014) discussed the linear quadratic optimization subject to LTI system with disturbance without positiveness constraint of the system (1). The problem is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (1) and to minimize the following quadratic performance index:

$$\min_{\mathbf{u}} \ \Im(\mathbf{u}),$$

where

$$\Im(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\gamma^2 \mathbf{x}^\top S \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u}) dt,$$

$\gamma > 0$ is a parameter and $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a symmetric positive semidefinite. Moreover, Roszak and Davidson (2014) and Beauthier and Winkin (2010) also discussed other aspect of the linear quadratic optimization subject to the system (1) but considering positiveness constraint.

In practice, output does not always behave as desired. This occurs because of there are some disruption in the system. Therefore, the objective function can be modified into other form. In this short note, we extend the results from Roszak and Davidson (2014) by eliminating the assumption asymptotic stability of the system (1).

For the system (1) where the state $\mathbf{x}$ is unmeasurable and the initial condition $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n$. Assume that the system (1) is positive, $\text{rank}(A) = n, \ r = m,$ i.e., the number of inputs is equal to the number of outputs, and $\mathbf{y}_{\text{des}} \in \mathbb{R}_+^r$ is a constant desired output. Find an optimal LTI controler $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ for some $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ that minimize the following objective function:

$$\Im(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \left(\gamma^2 \boldsymbol{\epsilon}^\top Q \boldsymbol{\epsilon} + \dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}}\right) dt, \tag{2}$$

where $\gamma > 0, Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$ is a symmetric positive definite, and the closed loop system

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + BK)\mathbf{x} + E\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + F\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{3}$$

is

1. asymptotic stable;

2. the state $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ and the output vector $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^r$ for each $t \geq 0$;

3. error $\boldsymbol{\epsilon}(t) = (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\text{des}}) \rightarrow \mathbf{0}$ as $t \rightarrow \infty$.

Note that in this case we do not need assume that the system (1) is asymptotic stable; compare to the assumption in Roszak and Davidson (2014).

In the following we present the process to construct the optimal control $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$. Assume that $\text{rank}(-CA^{-1}B) = r$ and define $K_0 = (-CA^{-1}B)^{-1}$ and $K_1 = -K_0(F-CA^{-1}E)$. It is easy to show that for any desire output $\mathbf{y}_{\text{des}}$ and disturbance $\boldsymbol{\omega}$, the steady state control $\mathbf{u}_{\text{s}}$ satisfies

$$\mathbf{u}_{\text{s}} = K_0\mathbf{y}_{\text{des}} + K_1\boldsymbol{\omega},$$

if the optimal control $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ exist Roszak and Davidson (2014).

Define a new variable $\boldsymbol{\varphi}$ such that $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \gamma\boldsymbol{\epsilon}$, the system (1) can be written as follows:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} - \begin{pmatrix} O \\ I_r \end{pmatrix} \mathbf{y}_{\text{des}} \tag{4}$$

Since the disturbance $\boldsymbol{\omega}$ and the desire output $\mathbf{y}_{\text{des}}$ are constant, (1) can be written as

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \gamma\boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Define $Q = K^\top K_0$. Likewise the problem under consideration becomes to find the control $\mathbf{u}$ that satisfy (5) and to minimize the objective function (2) and simultaneously to satisfy the condition 1 - 3. In another form this optimization problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\upsilon}} \quad & \Im(\boldsymbol{\upsilon}) = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{\phi}^\top \bar{Q}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\upsilon}^\top\boldsymbol{\upsilon}\right) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{\boldsymbol{\phi}} = \bar{A}\boldsymbol{\phi} + \bar{B}\boldsymbol{\upsilon}, \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{\mathbf{u}},\ \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \text{ and } \bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \gamma^2 Q \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Base on the LQR theory (Williams and Laurence, 2007), if the pair $(\bar{A}, \bar{B})$ is stabilizable and the pair $(\bar{Q}, \bar{A})$ is detectable then the optimal control for the problem (6) is

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\text{opt}} = -(P\bar{B})^{\top}\boldsymbol{\phi}_{\text{opt}}, \quad (8)$$

where P is a simmetric positive definite matrix that constitute a solution of the following algebraic Riccati equation:

$$\bar{A}^{\top}P + P\bar{A} + \bar{Q} - (P\bar{B})(P\bar{B})^{\top} = O, \quad (9)$$

and $\boldsymbol{\phi}_{\text{opt}}$ is the corresponding optimal state that satisfy the following differential equation:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = (\bar{A} - \bar{B}^{\top}P)\boldsymbol{\phi},$$

where $\boldsymbol{\phi}_{\text{opt}} \to \mathbf{0}$ as $t \to \infty$. This implies $\boldsymbol{\epsilon} \to \mathbf{0}$ and $\mathbf{x}_{\text{opt}} \to \mathbf{0}$ that proving the condition 1 and 3.

On applying (7) we have

$$\dot{\mathbf{u}}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{opt}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

where $\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = -(P\bar{B})^{\top}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $K_{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}^{m\times r}$such that

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{opt}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

So, we can choose $K = K_1$. Furthermore, using Corollary 3.7 in Beauthier and Winkin (2010) if the matrix $A + BK_1$ is Metzler then the closed loop (1) is positive that proving the condition 2.

Sebagai luaran dari hasil penelitian ini telah terjalin suatu kolaborasi penelitian antara peneliti dengan Assoct. Prof. Dr. Leong Wah June dari Institute for Mathematical Research Universiti Putra Malaysia. Suatu research visit ke Institute for Mathematical Research Universiti Putra Malaysia telah dilakukan pada 1-5 November 2016.

Luaran lainnya berupa suatu artikel yang disubmit ke jurnal internasional bereputasi

BAB 6
KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian berjudul Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Positif Tidak Stabil yang didanai oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Andalas Tahun Anggaran 2016 dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian Nomor: 666/XIII/A/Unand/2016 Tanggal 17 Februari 2016 telah selesai dilaksanakan.

Sebagai hasil saintifik telah dihasilkan sebuah artikel yang telah diseminarkan dalam forum seminar ilmiah internasional, yaitu International Conference on Education, Mathematics and Science 2016 in conjunction with 4th International Postgraduate Conference on Science and Mathematics 2016 (ICEMS2016 in conjunction IPCSM2016) yang diselenggarakan di Universiti Pendidikan Sultan Idris, Malaysia dengan judul makalah: " Linear Quadratic Optimization for Positive LTI System". Selain itu suatu artikel ilmiah berjudul "**A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System**" telah disubmit ke suatu jurnal internasional yang terindeks di Scopus, yaitu Jurnal of Applied Mathematics, dan saat ini dalam status under review.

Sebagai capaian tambahan telah dilakukan suatu rintisan untuk kerjasama penelitian dengan Institute for Mathematical Research (INSPEM) Universiti Putra Malaysia. Peneliti telah berkunjung ke Institute for Mathematical Research (INSPEM) Universiti Putra Malaysia selama tujuh hari dan sebagai hasilnya adalah artikel berjudul "**A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System**" yang telah disubmit ke suatu jurnal internasional yang terindeks di Scopus, yaitu Jurnal of Applied Mathematics.

DAFTAR PUSTAKA

[1] B.C. Ahn, J.W. Mitchell, (2001), *Optimal control development for chilled water plants using a quadratic representation*, Energy and Buildings, 33: 371-378.

[2] W. Allegrettoa, G. Fragnelli, P. Nistri and D. Papini, (2011), *Coexistence and optimal control problems for a degenerate predator–prey mode*l, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 378: 528–540.

[3] S. Athithan and G. Mini, (2015), *Optimal control of tuberculosis with case detection and treatment*, World Journal of Modelling and Simulation, vol. 11, 2: 111-122.

[4] R. Bartek and J. D. Edward, (2010), *The multivariable servomechanism problem for positive LTI systems*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 55, 9: 2204-2209.

[5] R. Bartek and J. D. Edward, (2014), *Optimal complementary control for positive stable LTI systems*, Automatica, 50: 1401–1406.

[6] C. Beauthier and J. J. Winkin, (2010), *LQ-optimal control of positive linear systems*, Optim. Control Appl. Meth., 31:547–566.

[7] L. Benvenuti and L. Farina, (2002), *Positive and compartmental systems*, IEEE transaction on automatic control, vol. 47, 2:370-373.

[8] J.C. Engwerda and Salmah, (2009), *The open-loop linear quadratic differential game for index one descriptor systems*, Automatica, 45: 585-592.

[9] D. Herbert and D. H. Richard, (2007), *On sustainable growth and collapse: Optimal and adaptive paths*, Journal of Economic Dynamics & Control, 31: 2374–2397.

[10] Z. S. Jin, (2011), *The analytical solution of balanced growth of non-linear dynamic multi-sector economic model*, Economic Modelling 28: 410–421

[11] M. Laabissi, J.J.Winkin and C. Beauthier, (2006), *On the positive LQ-problem for linear continuous time systems*, PositiveSystems in LNCIS 34: 295–302.

[12] Muhafzan, (2010), *Use of semidefinite programming for solving the LQR problem subject to rectangular descriptor systems*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., vol. 20, 4: 655–664.

[13] Muhafzan dan Stephane, I., (2013), *On stabilization of positive linear systems, Applied Mathematical Sciences*, vol. 37, 37: 1819-1824.

[14] D. S. Naidu, (2003), *Optimal Control Systems*, CRC Press, USA.

[15] I. Singo, Y. Takeuchi and X. Liu, (2006), Avian - human infuenza epidemic model, Mathematical Biosciences. Vol. 207, 1: 1-25.

LAMPIRAN
(Artikel Ilmiah)

ARTIKEL ILMIAH

PENELITIAN TOPIK UNGGULAN DOSEN DENGAN MELIBATKAN MAHASISWA S2/S3

TAHUN ANGGARAN 2016

KAJIAN EKSISTENSI KEPUTUSAN OPTIMAL MASALAH OPTIMASI DINAMIS KUADRATIK LINIER POSITIF TIDAK STABIL

1. **Dr. Muhafzan** **NIDN. 0002066712 (Ketua)**
2. **Syafrida Wirma Yenti, S.Pd** **NBP. 1520432008 (Anggota)**

Dibiayai oleh Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan
Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi
sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian
Nomor: 666/XIII/A/Unand/2016
Tanggal 17 Februari 2016

UNIVERSITAS ANDALAS

November 2016

A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System

Muhafzan[1], Nurweni Putri[2], Syafrida Wirma Yenti[3], Zulakmal[4] and Leong Wah June[5]

[1,2,3,4]Department of Mathematics, Universitas Andalas, Padang, Indonesia

[5]Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, Malaysia

[1]muhafzan@fmipa.unand.ac.id
[2]nurweniputril@gmail.com
[3]ema.swy@gmail.com
[4]zul_akmal@fmipa.unand.ac.id
[5]leongwj@upm.edu.my

ABSTRACT

Nowaday the linear quadratic optimization subject to positive linear time invariant (LTI) system constitute an interesting study considering it can become a mathematical model of variety of real problem whose variables have to nonnegative and trajectories generated by these variables must be nonnegative. In this paper we propose a method to generate an optimal control of linear quadratic optimization subject to positive linear time invariant (LTI) system. A sufficient condition that guarantee the existence of such optimal control is discussed.

Keywords: Linear Quadratic Optimization, LTI system, Metzler matrix.

1. INTRODUCTION

Given the following linear time invariant (LTI) system

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + E\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ &\mathbf{y} = C\mathbf{x} + F\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ is the output vector, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ is the input vector, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^q$ is disturbance vector, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$ and $F \in \mathbb{R}^{r\times q}$. The system (1) is called positive if for each nonnegative initial state, nonnegative input and nonnegative disturbance imply the state and output are nonnegative for every nonnegative time, i.e. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ and $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r_+$ for every $t \in \mathbb{R}_+$. It is well known that system (1) is positive if and only if A is a Metzler matrix, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}_+$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}_+$ and $F \in \mathbb{R}^{r\times q}_+$.[1] The characterization of positive systems attracts interest because this kind of system appears in the modelling of many processes in various field, e.g. in biology, chemistry and economics.[4,6] In these models state variables represent population, measure, mass, etc., and therefore, they are nonnegative. Many aspects of positive linear systems have been considered by different authors. A complete introduction to positive linear systems can be found in Farina and Rinaldi.[3] Stability of the positive linear system has been studied in Leenheer and Aeyels.[5] It turns out that system (1) is asymptotic stable if and only if A is Hurwitz, namely, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ for all $\lambda \in \sigma(A)$.

Recently, Wu, et al.[9] discussed the linear quadratic optimization subject to LTI system with disturbance without positiveness constraint of the system (1). The problem is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (1) and to minimize the following quadratic performance index:

$$\min_{\mathbf{u}} \Im(\mathbf{u}),$$

where

$$\Im(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\gamma^2 \mathbf{x}^\top S\mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u})dt,$$

$\gamma > 0$ is a parameter and $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a symmetric positive semidefinite. Moreover, Roszak and Davidson,[7] Beauthier and Winkin[2] also discussed other aspect of the linear quadratic optimization subject to the system (1) but considering positiveness constraint.

In practice, output does not always behave as desired. This occurs because of there are some disruption in the system. Therefore, the objective function can be modified into other form. In this short note, we extend the results from Roszak and Davidson[7] by eliminating the assumption asymptotic stability of the system (1).

2. PROBLEM FORMULATION

Given the system (1) where the state $\mathbf{x}$ is unmeasurable and the initial condition $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n_+$. Assume that the system (1) is positive, $\text{rank}(A) = n,\ r = m,$ i.e., the number of inputs is equal to the number of outputs, and $\mathbf{y}_{\text{des}} \in \mathbb{R}^r_+$ is a constant desired output. Find an optimal LTI controler $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ for some $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ that minimize the following objective function:

$$\Im(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \left(\gamma^2 \boldsymbol{\epsilon}^\top Q \boldsymbol{\epsilon} + \dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}}\right) dt, \tag{2}$$

where $\gamma > 0, Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$ is a symmetric positive definite, and the closed loop system

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + BK)\mathbf{x} + E\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + F\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{3}$$

is

1. asymptotic stable;
2. the state $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ and the output vector $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r_+$ for each $t \geq 0$;
3. error $\boldsymbol{\epsilon}(t) = (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\text{des}}) \to \mathbf{0}$ as $t \to \infty$.

Note that in this case we do not need assume that the system (1) is asymptotic stable; compare to the assumption in Roszak and Davidson.[7]

3. MAIN RESULT

In the following we present the process to construct the optimal control $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$. Assume that $\text{rank}(-CA^{-1}B) = r$ and define $K_0 = (-CA^{-1}B)^{-1}$ and $K_1 = -K_0(F - CA^{-1}E)$. It is easy to show that for any desire output $\mathbf{y}_{\text{des}}$ and disturbance $\boldsymbol{\omega}$, the steady state control $\mathbf{u}_{\text{s}}$ satisfies

$$\mathbf{u}_{\text{s}} = K_0 \mathbf{y}_{\text{des}} + K_1 \boldsymbol{\omega},$$

if the optimal control $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ exist.[7]

Define a new variable $\boldsymbol{\varphi}$ such that $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \gamma\boldsymbol{\epsilon}$, the system (1) can be written as follows:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} - \begin{pmatrix} O \\ I_r \end{pmatrix} \mathbf{y}_{\text{des}} \tag{4}$$

Since the disturbance $\boldsymbol{\omega}$ and the desire output $\mathbf{y}_{\text{des}}$ are constant, (1) can be written as

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \gamma\boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Define $Q = K^\top K_0$. Likewise the problem under consideration becomes to find the control $\mathbf{u}$ that satisfy (5) and to minimize the objective function (2) and simultaneously to satisfy the condition 1 - 3. In another form this optimization problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{v}} \quad & \Im(\boldsymbol{v}) = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{\phi}^\top \bar{Q}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}\right) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{\boldsymbol{\phi}} = \bar{A}\boldsymbol{\phi} + \bar{B}\boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{u}},\ \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \text{ and } \bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \gamma^2 Q \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Base on the LQR theory,[8] if the pair $(\bar{A}, \bar{B})$ is stabilizable and the pair $(\bar{Q}, \bar{A})$ is detectable then the optimal control for the problem (6) is

$$\boldsymbol{v}_{\text{opt}} = -(P\bar{B})^\top \boldsymbol{\phi}_{\text{opt}}, \tag{8}$$

where P is a simmetric positive definite matrix that constitute a solution of the following algebraic Riccati equation:

$$\bar{A}^\top P + P\bar{A} + \bar{Q} - (P\bar{B})(P\bar{B})^\top = O, \tag{9}$$

and $\boldsymbol{\phi}_{\text{opt}}$ is the corresponding optimal state that satisfy the following differential equation:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = (\bar{A} - \bar{B}^\top P)\boldsymbol{\phi},$$

where $\boldsymbol{\phi}_{\text{opt}} \to \mathbf{0}$ as $t \to \infty$. This implies $\boldsymbol{\epsilon} \to \mathbf{0}$ and $\mathbf{x}_{\text{opt}} \to \mathbf{0}$ that proving the condition 1 and 3.

On applying (7) we have

$$\dot{\mathbf{u}}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{opt}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where $\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = -(P\bar{B})^\top$, $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $K_{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}^{m\times r}$such that

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{opt}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

So, we can choose $K = K_1$. Furthermore, using Corollary 3.7 in Beauthier and Winkin,[2] if the matrix $A + BK_1$ is Metzler then the closed loop (1) is positive that proving the condition 2.

4. CONCLUSION

We have already show that desire optimal control for the problem under consideration is given by

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = K_1 \mathbf{x}_{\text{opt}}.$$

This control makes the closed loop (3) is asymptotic stable, positive and the error $\boldsymbol{\epsilon}(t) = (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\text{des}}) \to \mathbf{0}$ as $t \to \infty$. Some open problems of this note are:

1. under what condition the pair $(\bar{A}, \bar{B})$ is stabilizable and the pair $(\bar{Q}, \bar{A})$ is detectable
2. under what condition the matrix $(A + BK_1)$ is Metzler matrix.

Conflict of Interests

The author declares that there is no conflict of interests regarding the publication of this paper.

REFERENCES

1. L. Benvenuti and L. Farina, (2002), Positive and Compartmental Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47 (2), 370-373.
2. C. Beauthier and J. J. Winkin (2010), LQ Optimal Control of Positive Linear System, Optimal Control Application and Methods, 31:547–566.
3. L. Farina and S. Rinaldi, *Positive Linear Systems*, Wiley, New York, 2000.
4. J. A. Jacquez and C. P. Simon, Qualitative Theory of Compartmental Systems, SIAM Review, 35 (1993), 43-79.
5. P. D. Leenheer and D. Aeyels, Stabilization of Positive Linear Systems, *Systems* & *Control Letters*, 44 (2001), 259-271.
6. D. G. Luenberger, Introduction to Dynamic Systems, Wiley, New York, 1979.
7. B. Roszak and E. J. Davidson, (2014), Optimal complementary control for positive stable LTI systems, Automatica, 50, 1401-1406.
8. R. L. Williams and D. A. Laurence, (2007), Linear State-Space Control System, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
9. C. Wu, X. Wang, K. L. Teo and L. Jiang, (2014), Robust Optimal Control of Continuous Linear Quadratic System Subject to Disturbances, in Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, 11-34.

Hindawi

3509138.v1 (Research Article)

Title	A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System
Journal	Journal of Applied Mathematics
Issue	Regular
Manuscript Number	3509138 (Research Article)
Submitted On	2016-11-13
Author(s)	**Muhafzan Muhafzan**, Nurweni Putri, Syafrida Wirma Yenti, Zulakmal Zulakmal, Leong Wah June
Editor	
Status	Under Review

12.5% of 1,024.0M

Folders

Last Refresh:
Mon, 9:49 am
(Check mail)

- **INBOX** (990)
  Drafts
  Sent
  Trash

Subject: 3509138: Acknowledging Receipt
From: "Journal of Applied Mathematics" <rania.abdelaziz@hindawi.com>
Date: Sun, November 13, 2016 10:15 pm
To: muhafzan@fmipa.unand.ac.id
Cc: rania.abdelaziz@hindawi.com (more)
Priority: Normal
Options: View Full Header | View Printable Version | Download this as a file

Dear Dr. Muhafzan,

The Research Article titled "A Study on Existence of Optimal Control for Linear Quadratic Optimization Subject to Positive LTI System," by Muhafzan Muhafzan, Nurweni Putri, Syafrida Wirma Yenti, Zulakmal Zulakmal and Leong Wah June has been received and assigned the number 3509138.

All authors will receive a copy of all the correspondences regarding this manuscript.

Thank you for submitting your work to Journal of Applied Mathematics.

Best regards,

Rania Abdel Aziz
Editorial Office
Hindawi Publishing Corporation
http://www.hindawi.com