Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **4** Hal. 18 – 22
ISSN : 2303–2910
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

# BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HUTAN LINIER $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$

SHERLY AFRI ASTUTI, ZULAKMAL
*Program Studi Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*email : sherlyafriastuti@gmail.com*

**Abstrak.** Bilangan kromatik lokasi dari suatu graf tak terhubung $H$ adalah bilangan terkecil $k$ sedemikian sehingga terdapat pewarnaan lokasi dengan $k$ warna untuk graf $H$, dinotasikan dengan $\chi'_L(H)$. Dalam paper ini akan dibahas kembali makalah [6] tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$, dimana $n_i$ adalah banyaknya titik dari graf lintasan $P_{n_i}$. Diperoleh bahwa untuk $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$, dengan $r = \min\{n_i \mid i \in [1,t]\}$, jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $3 \leq \chi'_L(r) \leq r$. Secara khusus, $\chi_L(H) = 3$ hanya dipenuhi oleh $t = 1, 2$ atau 3.

*Kata Kunci*: Pewarnaan lokasi, bilangan kromatik lokasi, graf hutan linier

## 1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan pokok bahasan salah satu ilmu matematika yang banyak mendapat perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, diantaranya diterapkan dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan rancangan suatu bangunan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah jembatan Konisberg tersebut dapat dinyatakan dalam graf dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai [5].

Graf adalah pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk pada graf dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Jika tidak terdapat lintasan yang menghubungkan $u$ dan $v$ maka graf tersebut dinamakan graf tidak terhubung*(disconnected graph)*.

Untuk merepresentasikan titik-titik pada graf $G$, Chartrand dkk. [3] melakukan pengelompokan dengan cara mempartisi semua $v \in V(G)$ menjadi dua partisi atau lebih, berdasarkan pewarnaan titik dari graf $G$. Suatu pewarnaan titik dengan $k$ warna pada graf $G$ adalah suatu pemetaan $c : V \to \{1, 2, \cdots, k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika $u$ dan $v$ bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak $k$ maka $G$ dikatakan mempunyai $k$ pewarnaan ($k$-*coloring*). Kelas warna pada $G$, dinotasikan dengan $S_i$, merupakan himpunan titik-titik yang berwarna $i$ dengan $1 \leq$

$i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$, merupakan partisi terurut $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik. Maka representasi $v$ terhadap $\Pi$ disebut **kode warna** *(color code)* dari $v$, dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor-$k$ :

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di $G$ memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu $\Pi$, maka $c$ disebut pewarnaan lokasi *(locating coloring)* dari $G$. Oleh karena itu, pewarnaan lokasi pada graf $G$ adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di $G$ berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf $G$ disebut bilangan kromatik lokasi *(locating chromatic number).*

Berdasarkan [6], konsep bilangan kromatik lokasi dapat digunakan untuk semua graf, termasuk graf tak terhubung. Misal $c$ sebuah pewarnaan $k$ pada graf tak terhubung $H \simeq \bigcup G_i$. Misal $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ partisi dari $V(H)$ dihasilkan oleh $c$, dan $S_i$ adalah himpunan semua titik yang diberi warna $i$. Kode warna dari titik $v \in V(H)$ adalah urutan $k - tuple$ $(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$, dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ dan $d(v, C_i) < \infty$ untuk semua $i \in [1, k]$. Notasi $[a, b]$ menyatakan semua bilangan asli diantara $a$ dan $b$, dimana $a$ dan $b$ termasuk dalam $[a, b]$. Jika semua titik dari $H$ mempunyai kode warna berbeda, maka $c$ disebut **k-pewarnaan lokasi** dari $H$. Bilangan kromatik lokasi dari $H$ merupakan bilangan terkecil $k$ sedemikian sehingga terdapat pewarnaan lokasi dengan $k$ warna untuk graf $H$, dinotasikan dengan $\chi'_L(H)$. Jika tidak terdapat bilangan $k$ yang memenuhi kondisi diatas maka dapat didefinisikan $\chi'_L(H) = \infty$.

## 2. BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HUTAN LINIER $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$

Pada bab ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf hutan linier. Hutan *(forest)* adalah kumpulan pohon yang saling lepas. Dapat juga dinyatakan bahwa hutan adalah graf tak terhubung yang tidak memuat siklus, yang dalam hal ini setiap komponen di dalam graf tak terhubung tersebut adalah pohon. Graf hutan linier *(linear forest)* merupakan graf yang tidak terhubung dengan semua komponen adalah lintasan. Misal terdapat graf $G_i = (V_i, E_i)$, dengan $p_i$ titik dan $q_i$ sisi, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Graf $H = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ dikonstruksikan dari graf $G_i$, dengan cara menggabungkan semua graf $G_i$, sehingga diperoleh:

$$V(H) = \bigcup_{i=1}^{n} V(G_i) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_n), \text{ dan}$$

$$E(H) = \bigcup_{i=1}^{n} E(G_i) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \cdots \cup E(G_n).$$

Dapat dilihat bahwa,

$$\begin{aligned} \mid V(H) \mid &= \mid V(G_1) \mid + \mid V(G_2) \mid + \cdots + \mid V(G_n) \mid \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i, \\ \mid E(H) \mid &= \mid E(G_1) \mid + \mid E(G_2) \mid + \cdots + \mid E(G_n) \mid \\ &= q_1 + q_2 + \cdots + q_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_i \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa hutan linier merupakan graf yang tidak terhubung dengan semua komponen adalah lintasan.

Misalkan terdapat graf lintasan $P_n$ dengan $V(P_n) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Algoritma penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf $P_n$, $n \geq 2$ :

(1) Berikan $c(x_1) = 1$,
(2) Berikan warna pada titik di $P_n$, sbb

$$c(x_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap}, \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil}; \end{cases}$$

(3) Karena $d(x_i, x_1) \neq d(x_j, x_1)$, maka titik $x_i$ dan $x_j$ akan punya kode warna berbeda.

Pada Teorema 2.1 berikut diberikan batas atas dan batas bawah untuk bilangan kromatik lokasi dari graf tidak terhubung.

**Teorema 2.1.** [6] *Untuk setiap $i$, misal $G_i$ sebuah graf terhubung dan misalkan $H \simeq \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$, dimana $q = \max\{\chi_L(G_i) : i \in [1, m]\}$ dan $r = \min\{\mid V(G_i) \mid : i \in [1, m]\}$, dimana $[1, m]$ menyatakan $m$ bilangan asli pertama.*

**Teorema 2.2.** [6] *Misal $G$ sebuah graf terhubung dengan $\chi_L(G) = k$ dan $H \simeq tG$. Misal $G$ memiliki tepat satu titik dominan dalam setiap pewarnaan lokasi. Maka $\chi'_L(H) = k$ jika $t \leq k$, selainnya $\chi'_L(H) = \infty$.*

Pada Teorema 2.3 akan dikaji tentang bilangan kromatik lokasi dari graf hutan linier $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$, dimana $P_{n_i}$ adalah graf lintasan dengan $n_i$ daun.

**Teorema 2.3.** [6] *Misalkan $H \simeq \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$, $r = \min\{n_i \mid i \in [1, t]\}$, dimana $[1, t]$ menyatakan $t$ bilangan asli pertama, jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $3 \leq \chi'_L(H) \leq r$. Secara khusus, $\chi'_L(H) = 3$ hanya bisa dipenuhi oleh $t = 1, 2$ atau $3$.*

**Bukti.** Bagian pertama adalah akibat langsung dari Teorema 2.1. Sekarang, akan dibuktikan bagian dua. Misalkan $\chi'_L(H) = 3$, maka $t \leq 3$. Karena jika tidak, akan terdapat lebih dari tiga titik dominan, sebuah kontradiksi. Misalkan $V(H) = V(P_{n_1}) \cup V(P_{n_2}) \cup V(P_{n_3})$, dimana $V(P_{n_1}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}\}$, $V(P_{n_2}) =$

$\{y_1, y_2, \cdots, y_{n_2}\}$, dan $V(P_{n_3}) = \{z_1, z_2, \cdots, z_{n_3}\}$. Sekarang, konstruksikan pewarnaan $c : V(H) \to \{1, 2, 3\}$, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} c(x_1) &= c(y_2) = c(z_1) = 1, \\ c(x_2) &= c(y_1) = c(z_3) = 2, \\ c(x_3) &= c(y_3) = c(z_2) = 3; \end{aligned}$$

Sementara untuk $k \in [4, n_1], \ell \in [4, n_2]$ dan $m \in [4, n_3]$, konstruksikan

$$c(x_k) = \begin{cases} 2, \text{ jika } k \text{ genap}, \\ 3, \text{ jika } k \text{ ganjil}; \end{cases}$$

$$c(y_\ell) = \begin{cases} 1, \text{ jika } \ell \text{ genap}, \\ 3, \text{ jika } \ell \text{ ganjil}; \end{cases}$$

$$c(z_m) = \begin{cases} 3, \text{ jika } m \text{ genap}, \\ 2, \text{ jika } m \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah partisi yang disebabkan oleh pewarnaan $c$ dimana

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x_1, y_2, z_1\} \cup \{y_\ell \mid \ell \ genap\} \\ S_2 &= \{x_2, y_1, z_3\} \cup \{x_k \mid k \ genap\} \cup \{z_m \mid m \ ganjil\} \\ S_3 &= \{x_3, y_3, z_2\} \cup \{x_k \mid k \ ganjil\} \cup \{y_\ell \mid \ell \ ganjil\} \cup \{z_m \mid m \ ganjil\} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kode warna dari semua titik berbeda (lihat Gambar 1). Jelas bahwa

$$\begin{aligned} c_\Pi(x_1) &= (0, 1, 2), \\ c_\Pi(x_2) &= (1, 0, 1), \\ c_\Pi(x_3) &= (2, 1, 0), \\ c_\Pi(y_1) &= (1, 0, 2), \\ c_\Pi(y_2) &= (0, 1, 1), \\ c_\Pi(y_3) &= (1, 2, 0), \\ c_\Pi(z_1) &= (0, 2, 1), \\ c_\Pi(z_2) &= (1, 1, 0), \\ c_\Pi(z_3) &= (2, 0, 1). \end{aligned}$$

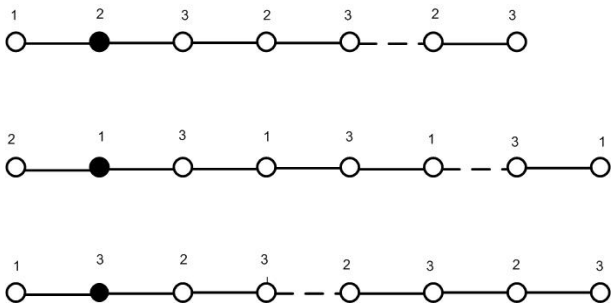
Untuk $k \in [4, n_1]$, $\ell \in [4, n_2]$, dan $m \in [4, n_3]$, diperoleh kode warna

$$c_\Pi(x_k) = \begin{cases} (k-1, 0, 1), \text{ jika } k \text{ genap}, \\ (k-1, 1, 0), \text{ jika } k \text{ ganjil}; \end{cases}$$

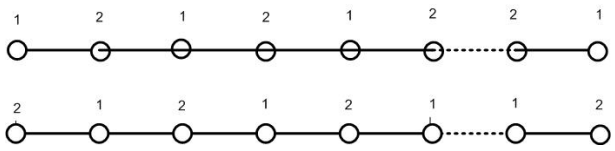
$$c_\Pi(y_\ell) = \begin{cases} (0, \ell-1, 1), \text{ jika } \ell \text{ genap}, \\ (1, \ell-1, 0), \text{ jika } \ell \text{ ganjil}; \end{cases}$$

$$c_\Pi(z_m) = \begin{cases} (m-1, 1, 0), \text{ jika } m \text{ genap}, \\ (m-1, 0, 1), \text{ jika } m \text{ ganjil}; \end{cases}$$

Oleh karena itu, semua titik mempunyai kode warna berbeda. Sebagai akibatnya, $\chi'_L(H) \leq 3$. Jika $t \leq 2$, maka pewarnaan $c$ dibatasi pada komponen yang sesuai, sehingga $\chi'_L(H) = 3$ untuk $t = 1, 2$ atau 3. □




Gambar 1. Pewarnaan lokasi dari $H \simeq P_{n1} \cup P_{n2} \cup P_{n3}$




Gambar 2. Pewarnaan lokasi $H \simeq P_{n1} \cup P_{n2}$

## 3. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Syafruddin M.Si dan Bapak Narwen, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] Asmiati dan E.T. Baskoro, Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3. *AIP Conf. Proc. 1450*. 2012. pp. 351 – 357

[2] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. London: The Macmillan Press LTD.

[3] Chartrand, G., D. Erwin, M. A. Henning, P.J. Slater dan P. Zhang. 2002. The locating chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101.

[4] Chartrand, G dan O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill, Inc. Unites States.

[5] Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Edisi Kedua. Informatika, Bandung.

[6] Welyyanti, D, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak dan S. Uttunggadewa. 2014. The locating-chromatic number of disconnected graphs, *Far East J. Math. Sci.* (FJMS) **94** (2): 169 – 182.